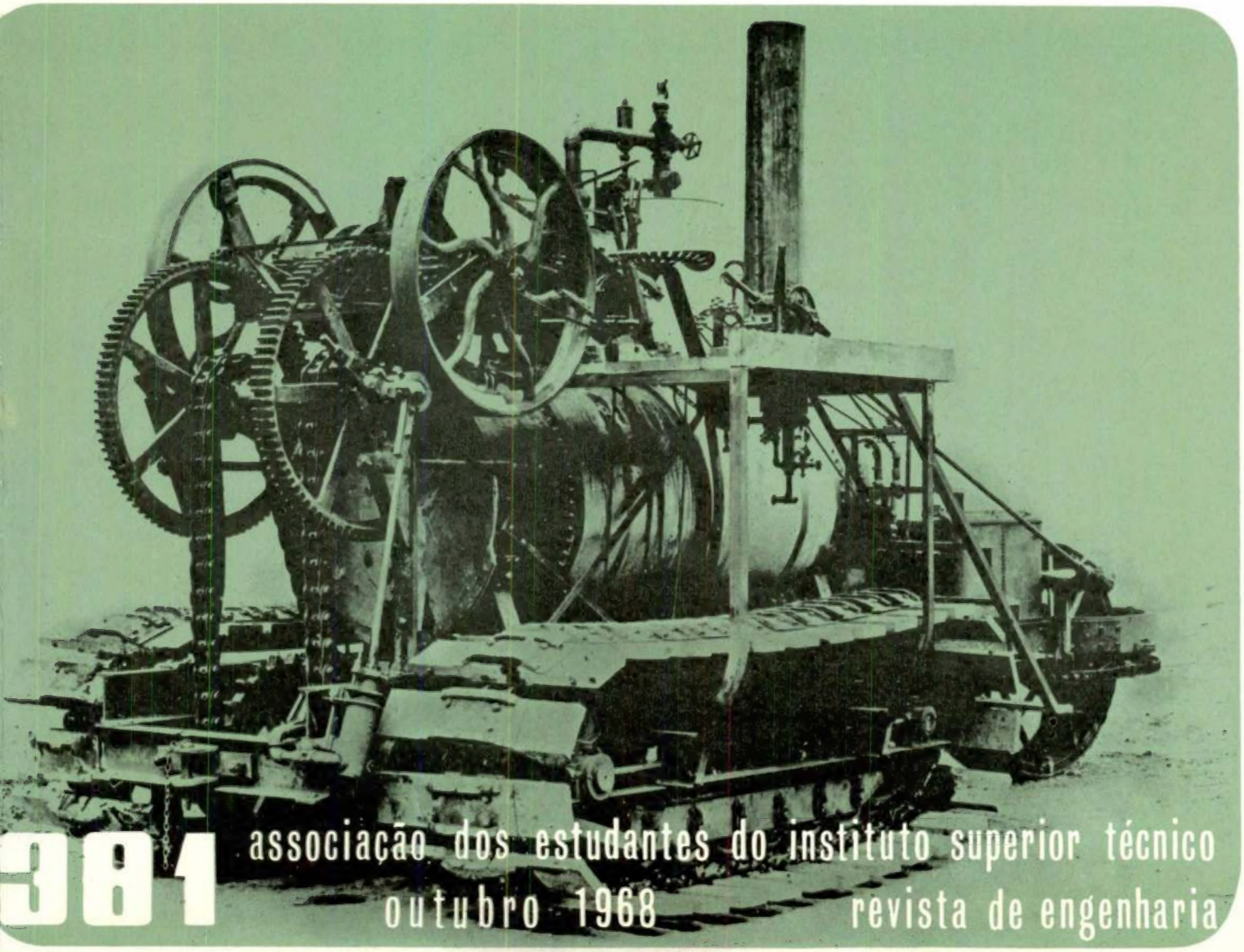
técnica



384

associação dos estudantes do instituto superior técnico

outubro 1968

revista de engenharia

VARÕES DE AÇO DE ALTA RESISTÊNCIA PARA BETÃO ARMADO TIPO A. 40
(«Heliaço» e «SNT 40»)

TENSÕES DE SEGURANÇA
Ra = 2400 kg/cm²
e
Ra = 4000 kg/cm² (SISMOS)

Literatura e Tabelas de Cálculo fornecidas gratuitamente

HELIAÇO, LDA.

R. DE S. JULIÃO, 41, 4.º D. — LISBOA

Tel.: 36 78 17 - 32 37 06 - 36 94 77

Fenner

REDUTORES DE VELOCIDADE

TIPO «PONTA DE VEIO»

mais de cem anos de progresso dos maiores fabricantes ingleses

REPRESENTANTES EXCLUSIVOS:

AUTO-LUSITANIA
ALFREDO DUARTE L^da^
AV. DA LIBERDADE 73-77 LISBOA

7.000 obras realizadas

coberturas
perfis especiais
vigas pré-esforçadas
pavimento trief
protecção de segurança

materiais novobra

pavimentos
em betão pré-esforçado
(homologados pelo Lab. Nac. de Engenharia Civil)

SOCIEDADE DE PRÉ-FABRICAÇÃO E OBRAS GERAIS NOVOBRA, LDA.
AV. EST. UNIDOS DA AMÉRICA, 100 - 5.º D.º - TEL. 774832 / 771603 - LISBOA 5

CIMENTO SECIL

Fábrica:
Outão — Setúbal
Telef. 228824/5

Escritório:
R. do Comércio, 56-3.º
LISBOA 2
Telef. 328201/2/3

técnica

NÚMERO 381 OUTUBRO DE 1968 ANO XLIII VOLUME XXX PUBLICAÇÃO MENSAL

Director

Victor M. M. Pinto

Administrador

Victor Coias e Silva

Corpo Redactorial

João M. Pereira
João Soares Alves
Rui Coutinho Torrinha
Silvério de Sousa Mendes

Editor e Proprietário

Associação dos Estudantes do Instituto Superior Técnico

Redacção e Administração

Avenida Rovisco Pais
Telefone 77 54 49
Lisboa 1

Assinaturas

		5 N.os	10 N.os
Continente e Ilhas	—	70$00	130$00
Ultramar, Brasil e Espanha	—	80$00	140$00
Estrangeiro	—	90$00	150$00

Número avulso — 20$00

Não se publica em Agosto e Setembro.

Os artigos assinados são da exclusiva responsabilidade dos seus autores.

Composto e impresso na Tipografia Jorge Fernandes, Lda. — Rua da Cruz dos Poiais 103 — Lisboa

SUMÁRIO

1 *LUÍS MALTEZ* — **Trajectória dum sistema.**
Trajectory of a Sistem.

7 *A. M. R. MARRECAS* — **Da teoria da fonte móvel num meio infinito a duas dimensões.**
About the theory or a moving heat source in a two dimensional infinite media

13 *LOBO FIALHO* e *MACHADO GONÇALVES* — **O efeito das variações térmicas sinusoidais nas estruturas laminares de comportamento elástico linear.**
Efect of sinusoidal thermic variations in concrete shells of linear elastical behaviour.

27 *VASCONCELOS PAIVA* — **O dimensionamento e a optimização de pavimentos pré-fabricados.**
Dimensionation and optimization of pre-fabricated floors.

41 *MADEIRA COSTA* — **Dimensionamento de secções de betão armado com compressão, em relação à rotura.**
Dimensionation of concrete sections submited to compression, in relation to rupture.

51 *ANTÓNIO VASCONCELOS* — **Algumas considerações sobre a forma dos acessórios de tubagem — Nota Técnica.**

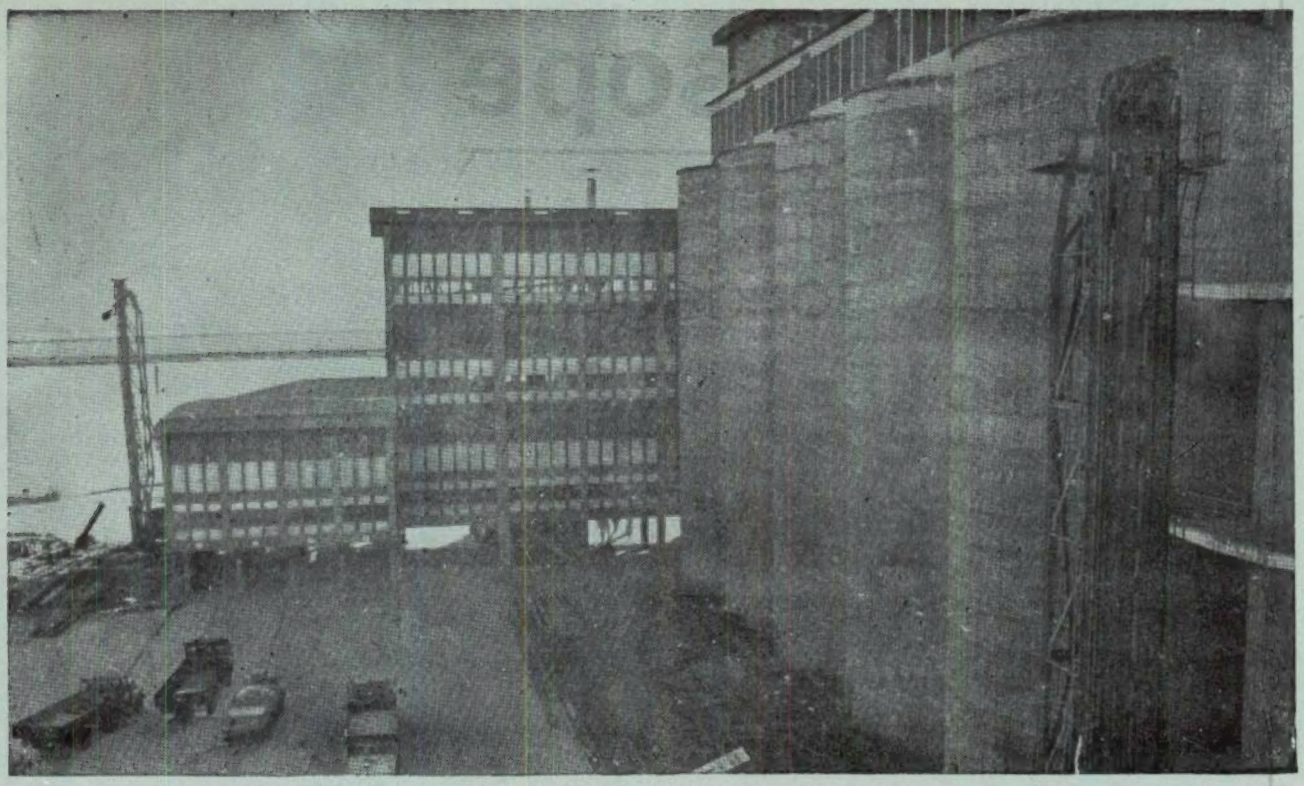
12-50 **Notas Informativas**
Elementos sobre a produção e o consumo de energia na rede eléctrica nacional.

Bibliografia

CAPA: Tractor a vapor. Fotografia cedida pela Caterpillar Overseas S. A.

ÍNDICE ALFABÉTICO DOS ANUNCIANTES

	Pág.
A. Johnson & Co (Portugal), Ltd.	XXVIII
AEG	XV
Asea Eléctrica	V, VII, XXIX e XXXI
Auto-Lusitânia	2.ª da capa
Bethencourt Bros	XXXIII
Cerâmica de Vale de Lobos, Lda.	XX
Cimento Secil	2.ª da capa
Companhia de Cimentos Brancos	VI
Construções Técnicas	XVII
Dial	XX
Electro-Arco, Ltd.ª	II
Empresa de Cimentos de Leiria	XXXIV
Empresa Electro Cerâmica	XXXI
Empresa de Produtos Asfálticos	X
Empresa de Sondagens e Fundações Teixeira Duarte, Lda.	3.ª da capa
Empresa Técnica de Equipamentos Eléctricos	XI
Empresa Ultramarina de Sondagens e Fundações	XVI
Fanafel	XVI
Fundações Franki, Lda.	I
Garagem Vitória	XXXII
Guedes & Almeida, Lda.	VIII
Harker Sumner	XXII
Heliaço	2.ª da capa
INA	XXVI
Instron	XXX
I. S. T.	XXVI
Isoluz	XX
J. J. Silva & Irmão	V
J. F. Azevedo e Silva	IV
J. Roma	VII
Jayme da Costa, Lda.	XIX
Johann Keller	V
LUSOTÉCNA	XIV
MAGUE	XIII
Novobra, Lda.	2.ª da capa
Química Hoechst	XXIX
Rotring	XXVII
Siemens	XXI
Soc. Const. Amadeu Gaudêncio	XXVI
Soc. Brown Boveri	4.ª da capa
Soc. Michaelis de Vasconcelos	XII
Sociedade Portuguesa Cavan	VI
Somague	XXXIV
Sondagens e Fundações A. Cavaco	II
Sondagens Ródio, Lda.	XXVI
Sopecate	II
Standard Eléctrica	IX
STET	XXIII
Tudor	VII
Wild Portugal, Lda.	III



COMPANHIA CIMENTO TEJO duas baterias de silos e ensacagem - ALHANDRA

Assente sobre Estacas FRANKI

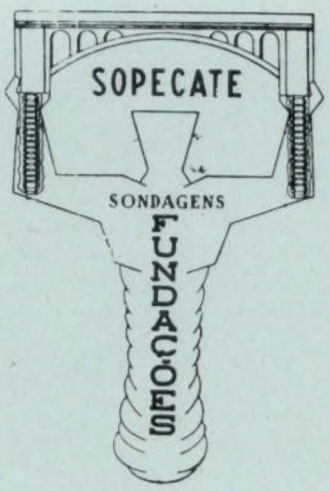
FUNDAÇÕES FRANKI L.DA

RUA BRAAMCAMP, 13-3.º — LISBOA 1 — TEL. P. P. C. 53 41 12/3/4 — ENDEREÇO TELEGRÁFICO: FRANKI — LISBOA

PRÉDIO SANTOS GIL, 6.º ANDAR — SALA 10 — TEL. 9 11 67 — CAIXA POSTAL 1397

ENDEREÇO TELEGRÁFICO: FRANKI—LOURENÇO MARQUES

TECNICA !



sopecate

sondagens - fundações

ESCRITÓRIO: RUA DO ARSENAL 146 2.º TELEFONES 3 40 10 - 32 02 08 LISBOA

• ESTUDOS, PESQUISAS E CAPTAÇÕES DE ÁGUA

• SONDAGENS

• REBAIXAMENTO DE NIVEIS AQUÍFEROS

• FUNDAÇÕES

SONDAGENS E FUNDAÇÕES A. CAVACO, LDA.

R. RODRIGO DA FONSECA, 62, R/C ESQ. — LISBOA - 1

TELEF. 56 11 71/72/73

ELECTRO-ARCO, L.DA

ELÉCTRODOS ✦ POSTOS ✦ ACESSÓRIOS

PARA A SOLDADURA ELÉCTRICA

*

MATERIAL APROVADO PELOS

LLOYD'S REGISTER OF SHIPPING

BUREAU VERITAS

GERMANISCHER LLOYD

—

LISBOA

Rua Silva Carvalho, 239

Tels. 68 36 49 - 68 48 93

FÁBRICA E LABORATÓRIOS

Venda Nova — Amadora

Tels. 97 06 13 - 97 17 33

PORTO

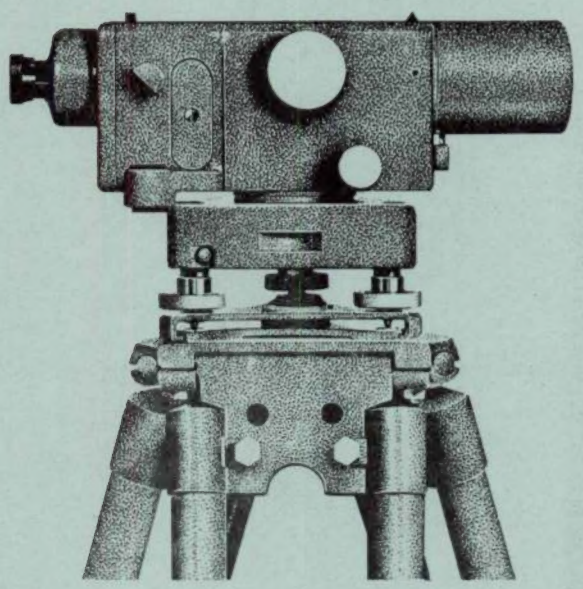
Rua do Bolhão, 216

Tel. 2 12 77 - 39 44 73

O novo Nível automático de engenheiro

WILD NAK 2

com círculo horizontal



WILD
HEERBRUGG

Para nivelamentos de média e grande precisão; com micrómetro de lâmina de faces plano-paralelas para nivelamentos de grande precisão.

Erro médio para 1 Km de nivelamento duplo: ± 1,5 mm

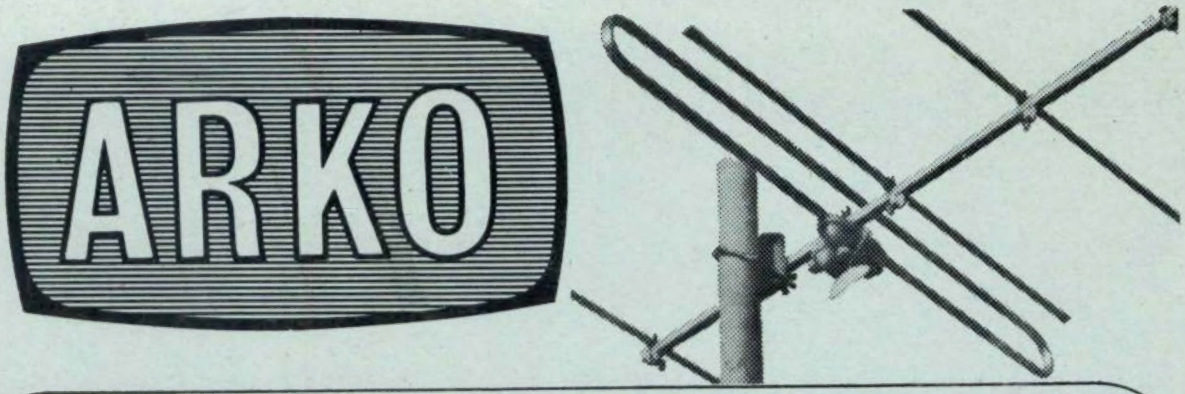
Erro médio para 1 Km de nivelamento duplo com micrómetro: ± 0,4 mm

Luneta de 30 × de aumento com imagem direita de observação

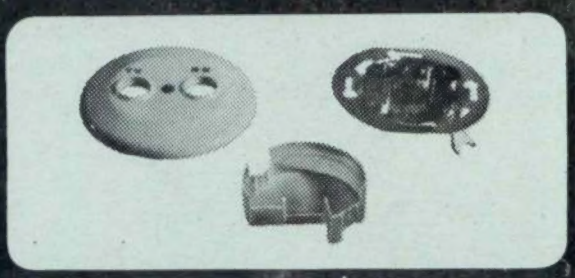
Solicitem catálogo ou demonstração aos representantes exclusivos

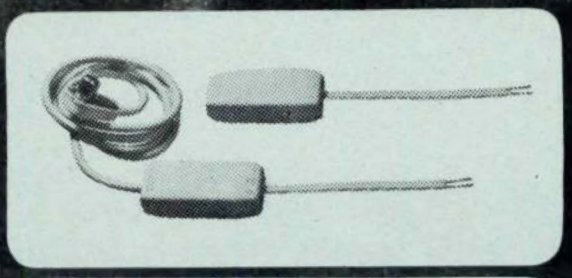
WILD PORTUGAL, LDA.

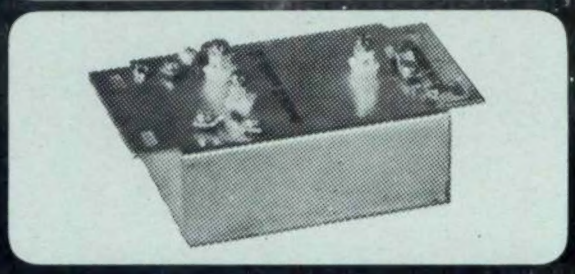
PRAÇA DAS ÁGUAS LIVRES, 8
LISBOA-2 — TELEFONE 68 91 12

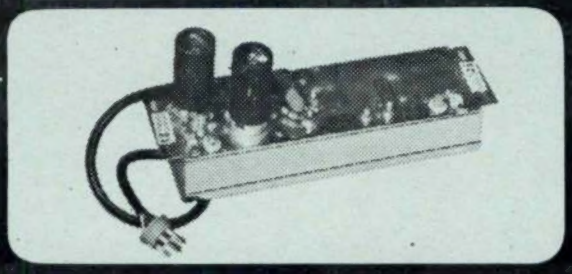


antenas para TV









CARACTERÍSTICAS

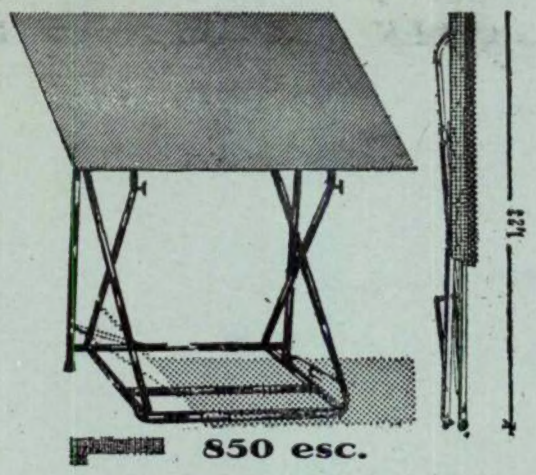
- modelos de 4 a 13 elementos
- ganhos de 5, 8, 10, 11 dB
- captação de qualquer canal de 5 a 11
- transformadores de impedâncias de 300/75 Ω
- extensa gama de acessórios: cabo blindado coaxial, adaptadores de impedâncias, misturadores, tomadas, amplificadores de sinal, divisores de baixada etc.

Impar

JF

J. F. DE AZEVEDO E SILVA & Cª, Lda

Rua S. Francisco de Sales, 2 1º andar, Tel. 654165 — Lisboa



850 esc.

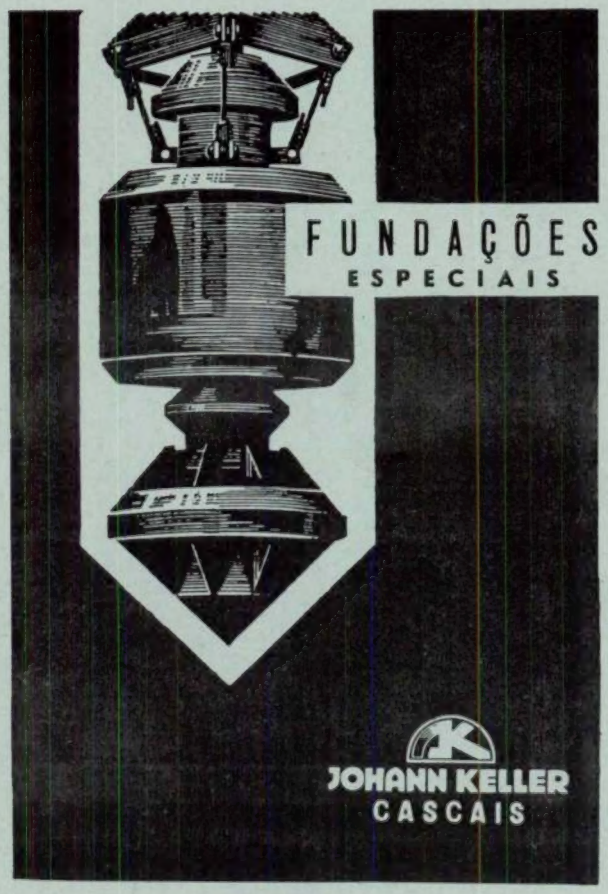
CARACTERÍSTICAS: Tubo de aço, articulado em qualquer posição, várias inclinações, fàcilmente transportável, não ocupa espaço quando fechado, prancheta de 1,20 × 0,80 de madeira, em tela. Pintura de estufa.

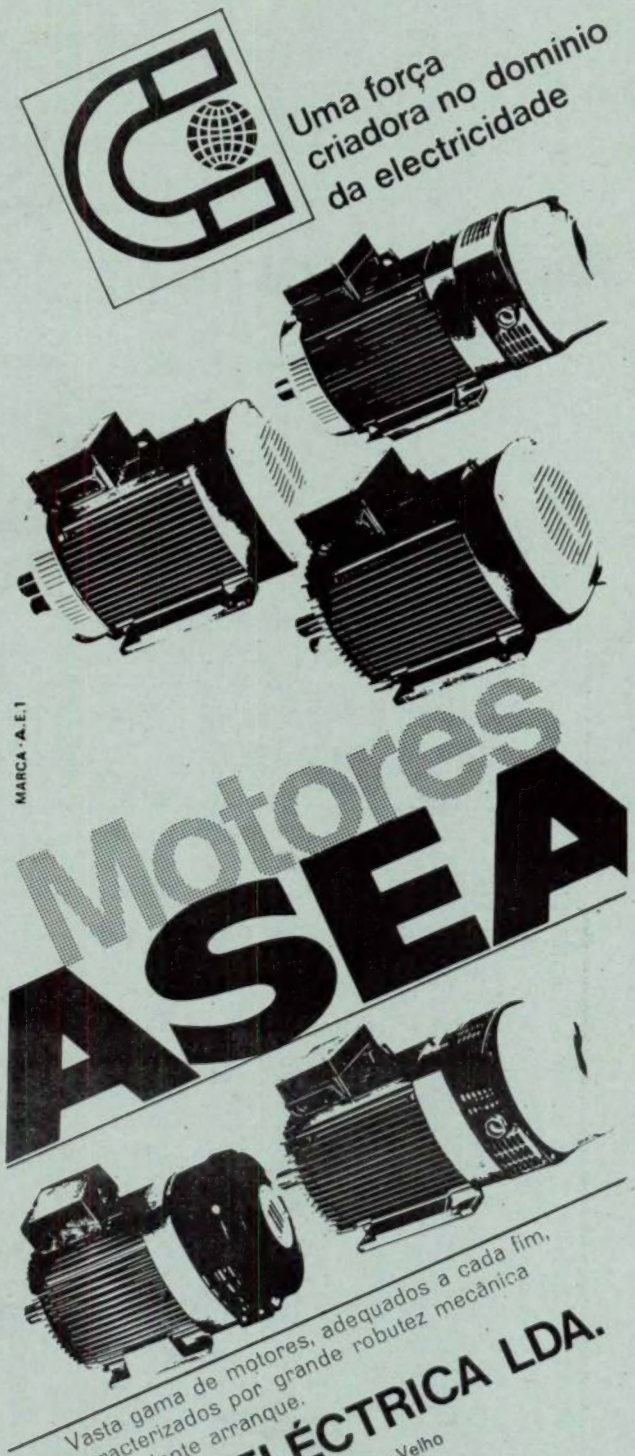
Em exposição, outros modelos de madeira e metálicos e todo o material de consumo e equipamento de desenho, escritório e papelaria

Distribuidores exclusivos, em Lisboa, do estirador de ***Fábrica Olaio***

J. J. SILVA & IRMÃO, LDA.

rua silva carvalho 232-b · lisboa · telefone 652750 / 680671





Vasta gama de motores, adequados a cada fim, caracterizados por grande robustez mecânica e excelente arranque.

ASEA ELÉCTRICA LDA.

Estrada do Prior Velho
Tel. 251110 1*
SACAVÉM

R. do Campo Alegre, 144
Tel. 62106/7
PORTO

O EMPREGO DO CIMENTO BRANCO...

permite acabamentos mais perfeitos, mais duradouros e muito mais económicos

Estude a vantagem do emprego do

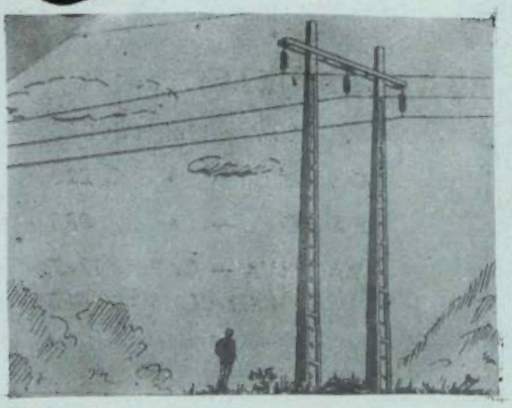
CIMENTO BRANCO LUSO

Consulte os distribuidores gerais

No Sul: **SCIAL** — T. do Corpo Santo, 15 — Telef. 66 61 86 — Lisboa
No Norte: **SCIAL** — R. do Bonjardim, 205 — Telef. 2 5779 — Porto

POSTES DE BETÃO PARA LINHAS ELÉCTRICAS
MOSAICOS E AZULEJOS
COLUNAS PARA ILUMINAÇÃO PÚBLICA
MANILHAS PARA ESGOTOS

SOCIEDADE PORTUGUESA
Carvam



RUA D. ESTEFÂNIA, 94-A-LISBOA-1 -TELEF. 47812-50129

WABCO

WESTINGHOUSE
AIR BRAKE COMPANY

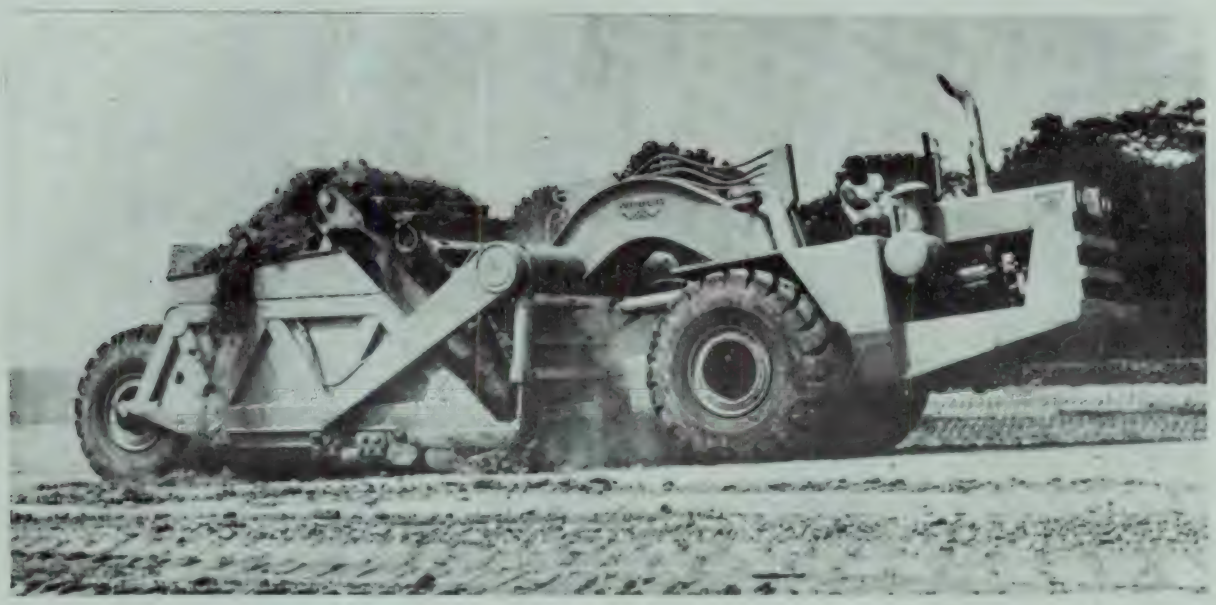
Construction Equipment Division
Peoria (Illinois) 61601

MOTO-SCRAPERS AUTO-CARREGADORES

CAPACIDADE DE 11, 21 E 31 JARDAS CÚBICAS

NÃO NECESSITA DE TRACTOR PARA EMPURRE!
UMA SÓ MÁQUINA... UM SÓ OPERADOR...

Escarifica... Carrega... Transporta... Descarrega... Em terrenos de toda a natureza!



DISTRIBUIDOR EXCLUSIVO

GUEDES & ALMEIDA LDA.

Rua Áurea, 181-2.º — LISBOA-2 — TELEFS. 32 50 80 e 32 78 45

Através das suas organizações de: LISBOA • LUANDA LOBITO • NOVA LISBOA e Agências de: PORTO, GUINÉ, S. TOMÉ E PRÍNCIPE e CABO VERDE fornecerá todos os elementos técnicos, para criteriosa escolha, assistência técnica e sobresselentes.
A1-a

• SOLDADURA ELÉCTRICA

• MATERIAL DE PROTECÇÃO

Aparelhagem de medidas eléctricas

- indicadora
- reguladora
- registadora

J. ROMA, L.DA

P. da Figueira, 12, 1.º LISBOA Tel. 865151

P. do Município, 309-6.º S 3 PORTO Tel. 0236732

MARCA · A.E.2

Uma força criadora no domínio da electricidade

Arrancadores ASEA

Para motores eléctricos: versões diferentes de arrancadores de grande eficiência e montagem fácil, com temporizador e relé térmico.

ASEA ELÉCTRICA LDA.

Estrada do Prior Velho
Tel. 2511101
SACAVÉM

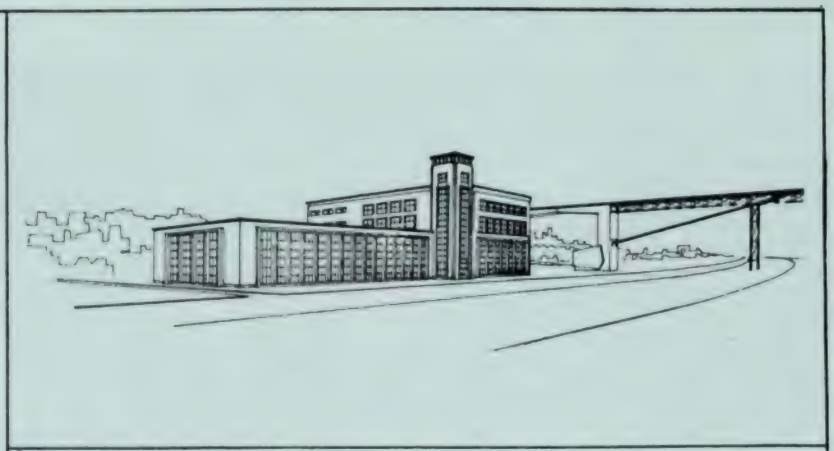
R. do Campo Alegre, 144
Tel. 62106/7
PORTO

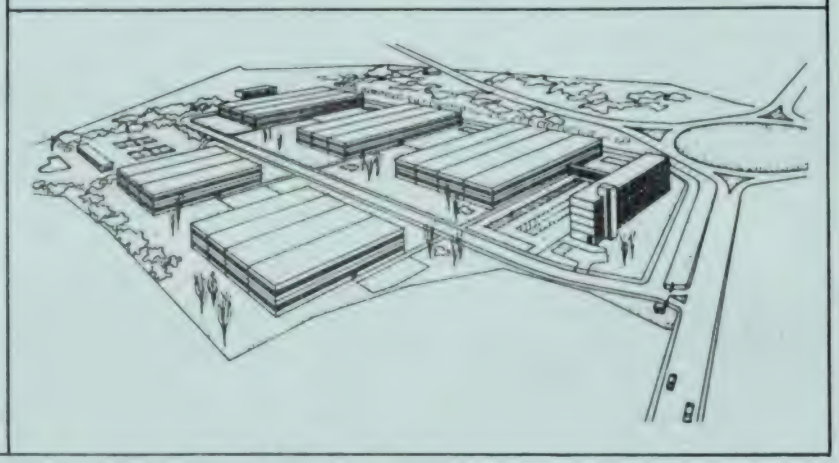
PARA COLAGEM DE TACOS DE MADEIRA USE:

Também próprio para:
impermeabilizar terrenos,
paredes, fundações, etc.

FÁBRICA EM SACAVÉM

RUA FILIPE FOLQUE-10 1.º — LISBOA
TELEF. 53 01 56 — TELEG. EPAMOA-LISBOA





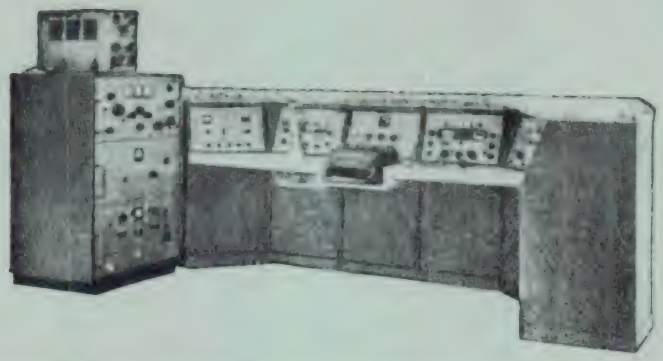
O CRESCIMENTO COMO FACTOR DE DESENVOLVIMENTO

Tal como as árvores, quando bem cuidadas, criam raízes, crescem, ramificam-se e dão bons frutos, assim as empresas, quando bem dirigidas, definem uma posição, desenvolvem-se, diversificam as suas actividades e lançam nos mercados produtos de alta qualidade.

A Standard Eléctrica, pioneira da indústria das Telecomunicações e Electrónica em Portugal, que em 1932 não dispunha de mais de uma escassa dezena de empregados, conta hoje com mais de 2200 pessoas nas suas fábricas de Lisboa, Cascais e Luanda. O ritmo de crescimento e expansão tem sido de tal modo elevado que o volume de vendas passou de 30 000 contos em 1957 para 300 000 em 1967, prevendo-se que em 1970 a produção total da Standard Eléctrica atinja o valor de 1 500 000 contos, dos quais 1 000 000 se destinam à exportação.

A Standard Eléctrica é, pois, um valor positivo na indústria nacional, que tem como base o elevado nível técnico e profissional e ainda o magnífico esforço de todos os que nela trabalham.

Standard Eléctrica **ITT**



Comunicações

equipamentos
e sistemas completos

- Cuidadosamente projectados
- Amplamente experimentados
- Completamente integrados

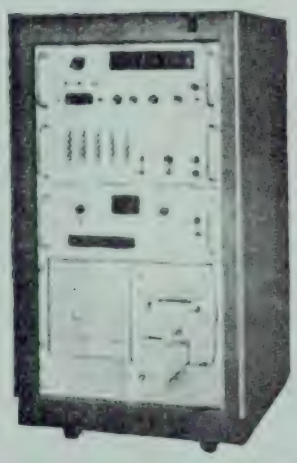
THE TECHNICAL MATERIEL CORPORATION

HEWLETT hp PACKARD

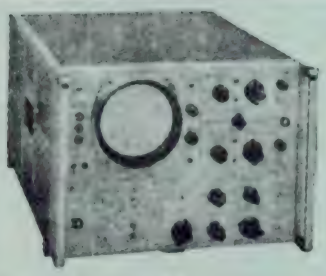
aparelhagem electrónica de medida e registo

Osciloscópios, Oscilógrafos, Voltímetros electrónicos, Geradores de sinal, Contadores electrónicos, Registadores digitais, Fontes de alimentação

Registador digital Dymec



Registador Sanborn



Osciloscópio HP

Contador Electrónico HP

TELECTRA EMPRESA TECNICA DE EQUIPAMENTOS ELECTRICOS, S.A.R.L.

Os pára-raios Oerlikon...

... estão na vanguarda do progresso e protegem instalações em todo o mundo

Corrente de descarga 5 kA

RV
380 & 500 V

Descarga de longas linhas em vazio, protecção de postos completos, transformadores, alternadores ou consumidores ligados a linhas aéreas. Para cada função, o pára-raios apropriado.

OERLIKON

VG/WG
6 – 37 kV

Corrente de descarga 5 e 10 kA respectivamente Ondas rectangulares 75 A 1000 µs e 150 A 2000 µs

WGE
40 – 73 kV

Corrente de descarga 10 kA Ondas rectangulares 150 A 2000 µs Membrana anti-explosão

WM/WMR
50 – 500 kV

Insuflação magnética Corrente de descarga 10 kA, Ondas rectangulares 1000 A 2000 µs Membrana anti-explosão

Para indicações mais amplas consultar os nossos representantes Sociedade Michaëlis de Vasconcellos, Ltda. Porto e Lisboa

Ateliers de Construction Oerlikon · Zurich (Suiça)

Representantes para Portugal e Ultramar: Sociedade Michaëlis de Vasconcellos, Lda., Porto e Lisboa

técnica

NUMERO 381 OUTUBRO DE 1968 ANO XLIII VOL. XXXI PUBLICAÇÃO MENSAL

C. D. U. 571.11

TRAJECTÓRIA DUM SISTEMA

por LUÍS MALTEZ
Assistente do I.S.T.

RESUMO

Apresenta-se uma possível forma de descrição matemática da trajectória dum sistema. Este problema particular integra-se no breve estudo dos sistemas iniciado pelo autor na "Técnica" n.º 378, com o artigo "Introdução ao Estudo dos Sistemas", no qual devem ser procuradas as definições das noções básicas agora utilizadas.

SYNOPSIS

A mathematical description of the trajectory of a system is presented. This is a particular problem within the brief study of systems started by the author in "Técnica" n.º 378, with the paper "Introdução ao Estudo dos Sistemas". In that paper can be found the definitions of the basical notions here used.

1. INTRODUÇÃO

No nosso artigo "Introdução ao Estudo dos Sistemas", publicado na "Técnica" n.º 378, chamámos, de forma simplista, trajectória dum sistema a qualquer sucessão de imagens num espaço cartesiano de observação.

Sempre que não se registassem ciclos evolutivos, essas sucessões poderiam ser simples conjuntos totalmente ordenados de imagens, em que a relação de ordem definiria a anterioridade na sucessão. Se, porém, houver ciclos, em que se repitam imagens anteriormente verificadas, seremos forçados a imaginar outra forma de definir a anterioridade na sucessão.

Assim, para dar generalidade à teoria, teremos de nos apoiar num conjunto totalmente ordenado, estranho ao sistema, que servirá de base de referência e que, por correspondência com o espaço das imagens, permitirá destrinçar a ordenação destas na sucessão.

É evidente, porém, que há certa arbitrariedade na escolha da base de referência, pelo que iremos encontrar diferentes tipos de correspondência conforme a base escolhida.

Por este motivo, para comparação do comportamento de dois sistemas, teremos sempre de referir ambos à mesma base. Do mesmo modo, se estivermos a estudar um único sistema, mas quisermos que esse estudo sirva para futuras comparações, teremos de especificar bem a base de referência, em condições de podermos reconstituí-la para outros sistemas.

Pelo contrário, a trajectória dum sistema, encarada como simples sucessão dos seus estados, ou das imagens destes, pode abstrair das peculiaridades da base de referência.

Dentro desta óptica, começaremos por estabelecer sequências de estados, em correspondência com uma base totalmente ordenada, mas posteriormente definiremos uma relação de equivalência entre sequências, de modo a permitir definir as trajectórias como classes de equivalência.

Notas à simbologia

Seja uma aplicação f de A em B. Seja

$$F \subset A \times B \qquad (1)$$

o gráfico da aplicação f. Então f é a tríade

$$f = (F, A \quad B) \tag{2}$$

O gráfico F define também uma relação binária $\mathscr{F}$ em $A \times B$.

Chamaremos f (a) a imagem do elemento $a \varepsilon A$ pela aplicação f, a qual é sempre um e um só elemento $b \varepsilon B$. Usaremos o símbolo F (a) para representar o corte do gráfico F pelo elemento $a \varepsilon A$, o qual é, neste caso, o conjunto $\{b\} \varepsilon P(B)$. Anàlogamente se representa pelo símbolo F (b) o corte de F por $b \varepsilon B$, o qual é um sub-conjunto de A, podendo o seu cardinal ser qualquer.

Para a imagem dum sub-conjunto $S \varepsilon P(A)$ pela aplicação f e pelo gráfico F, usaremos respectivamente os símbolos $f < S >$ e $F < S >$.

Note-se que é sempre

$$f < S > = F < S > \tag{3}$$

Espaço de observação

Como se pode verificar no nosso artigo acima referido, se um sistema S for observado por um conjunto

$$C_I = \{C_i : i \varepsilon I\} \tag{4}$$

de critérios de observação, o espaço de observação é o conjunto $\underset{i \varepsilon I}{X} V_i$, produto cartesiano dos conjuntos imagem por cada critério, eventualmente organizado como espaço vectorial.

A imagem do sistema S em $\underset{i \varepsilon I}{X} V_i$ é o conjunto

$$C_I < S > = \{E \varepsilon \underset{i \varepsilon I}{X} V_i : (\exists e \varepsilon S) \quad [E = C_I(e)]\} \tag{5}$$

Chamando

$$S_I = C_I < S > \tag{6}$$

tem-se òbviamente

$$S_I \subset \underset{i \varepsilon I}{X} V_i \tag{7}$$

2. SEQUÊNCIAS

Escolha da base de referência

O problema que se põe no estudo dum sistema é o da previsão da sua evolução a partir dum certo estado conhecido. Por isso, as sequências de estados a considerar serão sempre sequências limitadas à esquerda. Quer isto dizer que podemos sempre usar como base de referência um conjunto totalmente ordenado com primeiro elemento. Resta analisar qual deve ser a sua potência.

Se o sistema em estudo tiver um número finito ou numerável de estados, isto é, se S_I for finito ou numerável — o que não impede que o espaço cartesiano de observação $\underset{i \varepsilon I}{X} V_i$ possa ter potência superior — e se o sistema S evoluir sempre para um estado de estabilidade absoluta, então as sequências de estados serão sempre finitas, pelo que a base ordenada pode ser finita.

Se, porém, sendo ainda S_I finito ou numerável, o sistema contiver situações instáveis ou astáticas, isto é, se o sistema puder ter evolução divergente ou cíclica, já só poderemos descrever completamente as sequências sobre uma base numerável.

Em todos os outros casos encontrados na prática, verifica-se que é sempre suficiente que a base de referência tenha a potência do contínuo sem último elemento, isto é, o tipo de ordem da semi-recta real não negativa.

Como nada há de proibitivo na utilização duma base de potência superior à mínima necessária, vamos apenas tratar o caso geral, escolhendo para base de referência o conjunto totalmente ordenado $(R^+, <)$ dos números reais não negativos. Todos os casos particulares apontados se poderão obter por posteriores restrições das sequências obtidas em R^+ a um seu sub-conjunto numerável ou finito, ordenado pela ordem induzida. Veremos mais adiante como efectuar tais restrições.

Sequências de estados

Podemos obter uma sequência de estados associando a cada elemento da base de referência um e um só estado de S, ou melhor, um e um só elemento $E \varepsilon S_I$.

Nestas condições, chamaremos *sequência de estados* a qualquer aplicação σ de R^+ em S_I.

Ora, por definição de potência de conjuntos, o conjunto S_I^{R+} é o conjunto de todas as aplicações de R^+ em S_I, pelo que podemos chamar a S_I^{R+} o *conjunto das sequências.*

Cada sequência $\sigma \varepsilon S_I^{R^+}$ será então uma tríade

$$\sigma = (H, R^+, S_I) \tag{8}$$

em que

$$H \subset R^+ \times S_I \tag{9}$$

é o gráfico de σ. Cada elemento do gráfico H é um par ordenado do tipo (i, E) em que $i \varepsilon R^+$ dá a localização na base de referência da fase evolutiva de S em que a imagem do seu estado em $\underset{i \varepsilon I}{X} V_i$ é $E \varepsilon S_I$.

3. SEQUÊNCIAS REDUZIDAS

Partição de R^+ em intervalos conexos

Cada sequência $\sigma \varepsilon S_I^{R^+}$ permite operar uma partição da base R^+ em intervalos conexos, em cada um dos quais se mantém a imagem por σ. Para isso definiremos a família $(\vartheta_\sigma)_{\sigma \varepsilon S_I^{R^+}}$ de relações de equivalência em R^+, como segue:

> Dados i, j ε R^+ e dado $\sigma \varepsilon S_I^{R^+}$, diz-se que $i \vartheta_\sigma j$ se e só se
> $(\forall k\ [(i \leqslant k \leqslant j) v (j \leqslant k \leqslant i) \rightarrow (\sigma(k) = \sigma(i))]$ (10)

Demonstra-se (Ver Anexo) que ϑ_σ é uma relação de equivalência em R^+, visto que goza das propriedades reflexiva, simétrica e transitiva.

Podemos então determinar o conjunto cociente R^+/ϑ_σ de R^+ pela relação ϑ_σ, que é o conjunto das classes de equivalência definidas em R^+ por ϑ_σ. Cada uma destas classes (Ver Anexo) é um intervalo conexo em R^+, cujos pontos têm todos a mesma imagem por σ.

É óbvio que podem resultar classes com um único ponto $i \varepsilon R^+$. Chamar-lhe-emos ainda intervalo — será o intervalo fechado [i, i].

Base de referência reduzida

O conjunto cociente R^+/ϑ_σ acabado de formar é susceptível de ser totalmente ordenado por uma relação de ordem que simbolizaremos $\overset{\sigma}{<}$ e que se infere da relação $<$, como segue:

> Dados I_α, I_β R^+/ϑ_σ, diz-se que $I_\alpha \overset{\sigma}{<} I_\beta$ se e só se
> $(I_\alpha \neq I_\beta) \wedge [(\exists (i_\alpha, i_\beta) \varepsilon I_\alpha \times I_\beta)(i_\alpha < i_\beta)]$ (11)

Sendo I_α e I_β intervalos conexos em R^+ e mùtuamente disjuntos, por serem diferentes classes de R^+/ϑ_σ, conclui-se que o quantificador existencial $\exists$ pode ser substituído, na definição da relação $\overset{\sigma}{<}$, pelo quantificador universal $\forall$.

Obtivemos deste modo um conjunto totalmente ordenado $(R^+/\vartheta_\sigma, \overset{\sigma}{<})$ de potência igual ou inferior à de $(R^+, <)$; chamar-lhe-emos *base de referência reduzida* segundo σ.

Repare-se que R^+/ϑ_σ tem como primeiro elemento a classe que inclui o primeiro elemento de R^+ (o ponto zero).

Sequência de estados reduzida

A definição de R^+/ϑ_σ permite-nos definir imediatamente, a partir de σ, uma nova aplicação σ^*, agora de R^+/ϑ_σ em S_I, dizendo que

> Dado qualquer $\sigma \varepsilon S_I^{R^+}$, chama-se *sequência reduzida* de σ a aplicação
> $$\sigma^* = (H^*, R^+/\vartheta_\sigma, S_I) \tag{12}$$
> de gráfico
> $$H^* = \{ (I, E) \varepsilon R^+/\vartheta_\sigma \times S_I : \{E\} = \sigma < I > \} \tag{13}$$

Temos assim que

$$(\forall I \varepsilon R^+/\vartheta_\sigma)\ (\sigma < I > = \{\sigma^* (I)\}) \tag{14}$$

porque, sendo I uma classe de equivalência em R^+ segundo ϑ_σ, todos os seus elementos k têm a mesma imagem σ (k) e portanto o próprio I tem por imagem $\sigma < I >$ um conjunto com um único elemento σ (k), isto é

$$\sigma < I > = \{\sigma (k)\} \tag{15}$$

Em resumo, cada aplicação $\sigma \varepsilon S_I^{R^+}$ deu origem à geração de uma base de referência reduzida $(R^+/\vartheta_\sigma, \overset{\sigma}{<})$, sobre a qual foi definida uma aplicação σ^* com imagens em S_I. A imagem de uma classe por σ^* é a imagem de cada elemento dessa classe por σ.

Seja Σ_{R+} o conjunto de todas as aplicações σ^* assim obtidas. A forma utilizada na definição de σ^* corresponde a uma aplicação ψ de S_I^{R+} sobre Σ_{R+}, a qual é bijectiva, como é evidente. Será

$$\sigma^* = \psi(\sigma) \tag{16}$$

$$\sigma = \psi^{-1}(\sigma^*) \tag{17}$$

É assim equivalente falar na sequência $\sigma \varepsilon S_I^{R+}$ ou na sequência reduzida $\sigma \varepsilon \Sigma_R^+$.

4. TRAJECTÓRIAS

A sequência reduzida de uma sequência σ conserva toda a informação sobre a correspondência inicialmente estabelecida com a base de referência R^+. Com efeito, dado

$$\sigma^* = (H^*, R^+/\vartheta_\sigma, S_I) \tag{18}$$

conhecemos R^+/ϑ_σ e a imagem $\sigma^*(I)$ de cada $I \varepsilon R^+/\vartheta_\sigma$. Então, a sequência original σ será tal que

$$(\forall k \varepsilon I)\ (\sigma(k) = \sigma^*(I)) \tag{19}$$

É assim possível reconstituir σ a partir de σ^*, o que confirma que, como dissemos em 3., a aplicação ψ é bijectiva.

No entanto, a criação das sequências reduzidas prepara o caminho para a abstracção da base de referência e, além disso, informa-nos já sobre o cardinal mínimo que deve ter essa base. Ele terá, com efeito, que ser pelo menos igual ao de R^+/ϑ_σ.

Equivalência de sequências

Vamos agora definir uma relação de equivalência entre sequências reduzidas que permita, no conjunto cociente, incluir na mesma classe de equivalência as sequências que não difiram na natureza e ordenação dos estados, mas apenas na correspondência estabelecida com os elementos de R^+/ϑ_σ ou na constituição deste R^+/ϑ_σ.

Poderíamos também referir directamente esta relação de equivalência às sequências σ, mas, havendo uma bijecção entre S_I^{R+} e Σ_{R+}, com facilidade se passará de um a outro tipo de equivalência.

Definiremos então uma relação binária $\mathcal{E}^*$ em $\Sigma_{R+} \times \Sigma_{R+}$ do seguinte modo:

Sejam as aplicações σ_α^*, $\sigma_\beta^* \varepsilon \Sigma_{R+}$ tais que

$$\sigma_\alpha^* = (H_\alpha^*, R^+/\vartheta_{\sigma_\alpha}, S_I) \tag{20}$$

$$\sigma_\beta^* = (H_\beta^*, R^+/\vartheta_{\sigma_\beta}, S_I) \tag{21}$$

Diz-se que $\sigma_\alpha^* \mathcal{E}^* \sigma_\beta^*$ se e só se existir um isomorfismo φ de $\left(R^+/\vartheta_{\sigma_\alpha}, \overset{\sigma_\alpha}{<}\right)$ sobre $\left(R^+/\vartheta_{\sigma_\beta}, \overset{\sigma_\beta}{<}\right)$ tal que

$$\sigma_\alpha^* = \sigma_\beta^* \circ \varphi \tag{22}$$

Demonstra-se (Ver Anexo) que $\mathcal{E}^*$ goza das propriedades reflexiva, simétrica e transitiva, pelo que é efectivamente uma relação de equivalência em Σ_{R+}.

Paralelamente diremos que duas sequências $\sigma_\sigma, \sigma_\beta \varepsilon S_I^{R+}$ são equivalentes se se verificar $\sigma_\alpha \mathcal{E} \sigma_\beta$, em que $\mathcal{E}$ é uma relação binária em $S_I^{R+} \times S_I^{R+}$ definida por

Dados $\sigma_\alpha, \sigma_\beta \varepsilon S_I^{R+}$, diz-se que $\sigma_\alpha \mathcal{E} \sigma_\beta$ se e só se $\psi(\sigma_\alpha) \mathcal{E}^* \psi(\sigma_\beta)$ (23)

Dispensamo-nos de demonstrar que $\mathcal{E}$ é uma relação de equivalência em S_I^{R+}, o que resulta do facto de ψ ser bijectiva.

Trajectórias

Formemos o conjunto cociente

$$\tau = \Sigma_{R+}/\mathcal{E}^* \tag{24}$$

do conjunto das sequências reduzidas pela relação de equivalência acima introduzida. Cada elemento $\tau \varepsilon \tau$ é uma classe de sequências reduzidas, todas mùtuamente equivalentes, isto é, redutíveis umas às outras através de isomorfismos entre as respectivas bases de referência reduzidas.

Assim, em todas as sequências reduzidas σ^* de uma mesma classe τ (e também em todas as sequências σ que lhes correspondem por ψ) os estados de S ordenam-se pela mesma forma.

Está completada a abstracção da base de referência, desde que chamemos *trajectória* do sistema a cada classe de equivalência $\tau \varepsilon \tau$.

Como classe de equivalência que é, cada trajectória τ pode então ser representada por um qualquer dos seus elementos.

Com esta passagem da *sequência* para a *trajectória*, perdemos a possibilidade de estabelecer a simultaneidade entre um estado de S e outro qualquer fenómeno exterior a S e também perdemos a noção do ritmo de evolução de S.

Conserva-se, porém, a noção de evolução cíclica que S possa ter registado.

Note-se que as palavras «simultaneidade» e «ritmo» são usadas em sentido não necessàriamente temporal, mas apenas referido à base R^+ utilizada.

5. COMPORTAMENTO DUM SISTEMA

Regime livre

Dissemos no nosso artigo já referido que, dados um sistema S e uma base de referência C, existe uma correspondência entre S e o conjunto das suas evoluções segundo C.

Passando aos espaços imagem, diremos agora que existe, entre S_I, imagem do sistema S em $\underset{i \in I}{X} V_i$, e $\Sigma^S_{R^+}$, conjunto das sequências reduzidas, uma correspondência que, a cada estado observado $E \in S_I$ associa uma ou mais sequências reduzidas $\sigma^*_S \in \Sigma^S_{R^+}$, tais que a imagem do primeiro elemento de $R^+ / \vartheta_{\sigma_S}$ é E — aquelas que S puder sofrer sem influências exógenas.

A composição desta correspondência com a aplicação canónica de $\Sigma^S_{R^+}$ sobre $\tau_S = \Sigma^S_{R^+} / / \mathcal{E}^*$, gera uma correspondência entre S_I e τ_S, que indica as trajectórias possíveis, em regime livre, com início em cada estado observado E.

Regime forçado

Da mesma forma, se o sistema S for sujeito à acção do meio exterior M, existirá uma correspondência entre $S_I \times \Sigma^M_{R^+}$, e $\Sigma^S_{R^+}$, que, a cada par $(E, \sigma^*_M) \in S_I \times \Sigma^M_{R^+}$ associa uma ou mais sequências reduzidas $\sigma^*_S \in \Sigma^S_{R^+}$, iniciadas em E — aquelas que S puder sofrer quando M registar a sequência reduzida σ^*_M.

Podemos da mesma forma, através da aplicação canónica de $\Sigma^S_{R^+}$ sobre τ_S, passar a uma nova correspondência sobre o conjunto das trajectórias de S. Porém, isso tem aqui menos interesse, na medida em que é necessário não perder a noção de simultaneidade de estados de M e de S.

NOTA FINAL

Estamos agora em condições de poder passar à consideração dos sistemas como operadores no fluxo de informação, o que faremos em próximo artigo.

ANEXO

1) *ϑ_σ é uma relação de equivalência em R^+*

a) A relação ϑ_σ é *reflexiva*

Efectivamente, dado qualquer $i \in R^+$ e qualquer $\sigma \in S_I^{R^+}$, temos que:

$$(\forall k)\ [(i \leqslant k \leqslant i) \vee (i \leqslant k \leqslant i) \longrightarrow (k = i) \longrightarrow \longrightarrow (\sigma(k) = \sigma(i))] \qquad (25)$$

o que, por (10), prova que $i\ \vartheta_\sigma\ i$.

A relação ϑ_σ é *simétrica*

Temos que demonstrar que, quaisquer que sejam $i, j \in R^+$ e $\sigma \in S_I^{R^+}$, se tem

$$i\ \vartheta_\sigma\ j \longrightarrow j\ \vartheta_\sigma\ i \qquad (26)$$

Com efeito, temos então por hipótese, que

$$(\forall k)\ [(i \leqslant k \leqslant j) \vee (j \leqslant k \leqslant i) \longrightarrow (\sigma(k) = \sigma(i))] \qquad (27)$$

Ora é evidente que

$$(i \leqslant j \leqslant j) \vee (j \leqslant j \leqslant i) \qquad (28)$$

O termo da disjunção verificado depende de ser $i \leqslant j$ ou $j \leqslant i$, podendo ser ambos verdadeiros se $i = j$.

A própria hipótese (27) impõe então que

$$\sigma(j) = \sigma(i) \qquad (29)$$

donde, ainda por (27)

$$(\forall k)\ [(j \leqslant k \leqslant i) \vee (i \leqslant k \leqslant j) \longrightarrow (\sigma(k) = \sigma(j))] \qquad (30)$$

provando, por (10), que $j\ \vartheta_\sigma\ i$.

c) A relação ϑ_σ é *transitiva*

Temos que demonstrar que, quaisquer que sejam, $i, j, k \in R^+$ e $\sigma \in S_I^{R^+}$, se tem

$$i\ \vartheta_\sigma\ j \wedge j\ \vartheta_\sigma\ k \longrightarrow i\ \vartheta_\sigma\ k \qquad (31)$$

Com efeito, temos então, por hipótese

$$(\forall m)\,[(i \leqslant m \leqslant j) \vee (j \leqslant m \leqslant i) \longrightarrow (\sigma(m) = \sigma(i))] \quad (32)$$

$$(\forall m)\,[(i \leqslant m \leqslant k) \vee (k \leqslant m \leqslant j) \longrightarrow (\sigma(m) = \sigma(j))] \quad (33)$$

Vimos em (29) que

$$i\ \vartheta_\sigma\ j \longrightarrow (\sigma(j) = \sigma(i)) \quad (34)$$

pelo que, de (32) e (33) vem

$$(\forall m)\ [(i \leqslant m \leqslant j) \vee (j \leqslant m \leqslant i) \vee (j \leqslant m \leqslant k) \vee (k \leqslant m \leqslant j) \longrightarrow (\sigma(m) = \sigma(i))] \quad (35)$$

Ora, quaisquer que sejam i, j, k ε R^+, tem-se

$$(i \leqslant m \leqslant k) \longrightarrow (i \leqslant m \leqslant j) \vee (j \leqslant m \leqslant k) \quad (36)$$

$$(k \leqslant m \leqslant i) \longrightarrow (j \leqslant m \leqslant i) \vee (k \leqslant m \leqslant j) \quad (37)$$

donde vem, por (35), que

$$(\forall m)\,[(i \leqslant m \leqslant k) \vee (k \leqslant m \leqslant i) \longrightarrow (\sigma(m) = \sigma(i))] \quad (38)$$

Isto prova que $i\ \vartheta_\sigma\ k$, o que completa a demonstração de que ϑ_σ é uma relação de equivalência em R^+.

2) *Cada $I \varepsilon R^+ / \vartheta_\sigma$ é um intervalo conexo em R^+.*

Seja $I \varepsilon R^+ / \vartheta_\sigma$ e sejam dados i, i' ε I, com $i < i'$. Sendo I uma classe de equivalência segundo ϑ_σ e sendo i, i' ε I, temos que $i\ \vartheta_\sigma\ i'$.

Devido a (10) pode então escrever-se

$$(\forall k)\ [(i \leqslant k \leqslant i') \longrightarrow (\sigma(k) = \sigma(i))] \quad (39)$$

Consideremos agora j tal que

$$i \leqslant j \leqslant i' \quad (40)$$

Temos, por (39), que

$$(\forall k)\ [(i \leqslant k \leqslant j) \longrightarrow (i \leqslant k \leqslant i') \longrightarrow (\sigma(k) = \sigma(i))] \quad (41)$$

pelo que $i\ \vartheta_\sigma\ j$.

Mostrámos assim que

$$(i < i') \wedge (i, i' \varepsilon I) \longrightarrow (\forall j \varepsilon [i, i'])\ (j \varepsilon I) \quad (42)$$

o que prova que I é um intervalo conexo (fechado ou aberto) em R^+.

3) *$\mathcal{S}^*$ é uma relação de equivalência em Σ_{R+}*

a) A relação $\mathcal{S}^*$ é *reflexiva*

Efectivamente, dado qualquer $\sigma^* \varepsilon \Sigma_{R^+}$, basta tomar a aplicação identidade φ de R^+/ϑ_σ sobre R^+/ϑ_σ, a qual é um isomorfismo para a relação de ordem $\overset{\sigma}{<}$, para provar que

$$\sigma^* = \sigma^* \circ \varphi \quad (43)$$

e portanto que $\sigma^*\ \mathcal{S}^*\ \sigma^*$

b) A relação $\mathcal{S}^*$ é *simétrica*

Temos de demonstrar que, quaisquer que sejam σ^*_α, σ^*_β ε Σ_{R+} se tem

$$\sigma^*_\alpha\ \mathcal{S}^*\ \sigma^*_\beta \longrightarrow \sigma^*_\beta\ \mathcal{S}^*\ \sigma^*_\alpha \quad (44)$$

Existirá então, por hipótese, o isomorfismo φ de $(R^+/\vartheta_{\sigma_\alpha}, \overset{\sigma_\alpha}{<})$ sobre $(R^+/\vartheta_{\sigma_\beta}, \overset{\sigma_\beta}{<})$ tal que

$$\sigma^*_\alpha = \sigma^*_\beta \circ \varphi \quad (45)$$

Mas, então, a correspondência inversa φ^{-1} de φ é também um isomorfismo de $(R^+/\vartheta_{\sigma_\beta}, \overset{\sigma_\beta}{<})$ sobre $(R^+/\vartheta_{\sigma_\alpha}, \overset{\sigma_\alpha}{<})$ e verifica, por σ^*_β, φ e φ^{-1} serem aplicações

$$\begin{aligned} \sigma^*_\alpha \circ \varphi^{-1} &= (\sigma^*_\beta \circ \varphi) \circ \varphi^{-1} \\ &= \sigma^*_\beta \circ (\varphi \circ \varphi^{-1}) \\ &= \sigma^*_\beta \end{aligned} \quad (46)$$

provando que $\sigma^*_\beta\ \mathcal{S}^*\ \sigma^*_\alpha$.

c) A relação $\mathcal{S}^*$ é *transitiva*

Temos de demonstrar que, dados quaisquer σ^*_α, σ^*_β, σ^*_γ ε Σ_{R+}, se tem

$$\sigma^*_\alpha\ \mathcal{S}^*\ \sigma^*_\beta \wedge \sigma^*_\beta\ \mathcal{S}^*\ \sigma^*_\gamma \longrightarrow \sigma^*_\alpha\ \mathcal{S}^*\ \sigma^*_\gamma \quad (47)$$

Ora existem, por hipótese, os isomorfismos φ_a de $(R^+/\vartheta_{\sigma_\alpha}, \overset{\sigma_\alpha}{<})$ sobre $(R^+/\vartheta_{\sigma_\beta}, \overset{\sigma_\beta}{<})$ e φ_b de $(R^+/\vartheta_{\sigma_\beta}, \overset{\sigma_\beta}{<})$ sobre $(R^+/\vartheta_{\sigma_\gamma}, \overset{\sigma_\gamma}{<})$ tais que

$$\left\{ \begin{aligned} \sigma^*_\alpha &= \sigma^*_\beta \circ \varphi_a \quad (48) \\ \sigma^*_\beta &= \sigma^*_\gamma \circ \varphi_b \quad (49) \end{aligned} \right.$$

Daqui resulta, por σ^*_γ, φ_b e φ_a serem aplicações, que

$$\begin{aligned} \sigma^*_\alpha &= (\sigma^*_\gamma \circ \varphi_b) \circ \varphi_a \\ &= \sigma^*_\gamma \circ (\varphi_b \circ \varphi_a) \end{aligned} \quad (50)$$

Como φ_a e φ_b são isomorfismos, também $\varphi_b \circ \varphi_a$ é um isomorfismo de $(R^+/\vartheta_{\sigma_\alpha}, \overset{\sigma_\alpha}{<})$ sobre $(R^+/\vartheta_{\sigma_\gamma}, \overset{\sigma_\gamma}{<})$, pelo que (50) prova que $\sigma^*_\alpha\ \mathcal{S}^*\ \sigma^*_\gamma$.

Fica assim demonstrado que $\mathcal{S}^*$ é uma relação de equivalência em Σ_{R+}.

C. D. U. 536.2.01

DA TEORIA DA FONTE MÓVEL NUM MEIO INFINITO A DUAS DIMENSÕES

por A. M. R. MARRECAS
Bolseiro do IAC no NEEM

RESUMO

Generaliza-se ao regime transiente a solução da equação do calor no caso de uma fonte móvel com velocidade constante num meio infinito a duas dimensões. É usada a transformada de Laplace.

SYNOPSIS

The solution for two-dimensional heat flow due to a constant velocity moving heat source is extended to transient case. Laplace transform is used.

NOMENCLATURA

T — Temperatura (origem 0)
t — Tempo
V = Velocidade da fonte
k — Condutividade térmica
α — Difusividade térmica
Q — Quantidade de calor libertada pela fonte na unidade de tempo
(x , y) — Referencial móvel associado à fonte
$r^2 = x^2 + y^2$
J_0 ( ) — Função de Bessel de primeira espécie e ordem zero
Y_0 ( ) — Função de Bessel de segunda espécie e ordem zero
I_0 ( ) — Função de Bessel modificada de primeira espécie e ordem zero
K_0 ( ) — Função de Bessel modificada de segunda espécie e de ordem zero
C_1, C_2 — Constantes de integração

1 — INTRODUÇÃO

O processo de análise seguido em [1] é susceptível de, mediante algumas adaptações exigidas pelo novo modelo físico, conduzir ao resultado pretendido. A extensão ao regime transiente da solução correspondente ao regime estacionário que Rosenthal aponta em [2]. Esta a razão porque omitiremos observações e passos que nos pareçam redundantes com os inclusos em [1].

2 — MODELO TEÓRICO

Difere do indicado em [1] em dois pontos:

— O meio onde se desenvolvem os fenómenos térmicos é um plano material isolado em ambas as faces;
— Nos referenciais associados ao meio e à fonte omitem-se, agora os eixos dos ZZ.

2.1 — Tratamento matemático

A equação do calor não conterá derivadas em ordem aos ZZ, pelo que, escrita já no referencial móvel, reveste a forma

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{V}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t} \qquad (1)$$

2.1.1 — Regime estacionário

A integração da equação respectiva

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{V}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial x} = 0 \tag{2}$$

conduz à solução [2]

$$T = \frac{Q}{2\pi k} e^{-\frac{V}{2\alpha}x} k_0\left(\frac{V}{2\alpha} r\right) \tag{3}$$

2.1.2 — Regime transiente

A solução obter-se-á integrando

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{V}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t} \tag{4}$$

2.1.2.1 — Integração de (4)

1) Condições fronteiras a respeitar

$T = o$ Para $t = 0^+$, em todo o domínio (1.a)

$T \to o$ Para t qualquer quando $\left\{ \begin{matrix} x \\ r \end{matrix} \right. \to \infty$ (1.b)

$-2\pi r k \frac{\partial T}{\partial r} \to Q$ Para $t > o$ qualquer quando $r \to o$ (1.c)

2) Por proposição da primitiva

$$T = e^{-\frac{V}{2\alpha}x} f(x, y, t)$$

(4) Transforma-se em

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\frac{V}{2\alpha}\right)^2 f = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial f}{\partial t} \tag{5}$$

3) Aplicando a transformada de Laplace em ordem a t, (5) adquire a forma

$$\frac{\partial^2 \bar{f}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{f}}{\partial y^2} - \left(\frac{V}{2\alpha}\right)^2 \bar{f} = \frac{S}{\alpha}\bar{f} - \frac{1}{\alpha} T(o^+, x, y) \tag{6}$$

em que

$$\bar{f}(x, y, s) = \bar{f} = \int_0^\infty f(x, y, t)\, e^{-st}\, dt$$

MAGUE

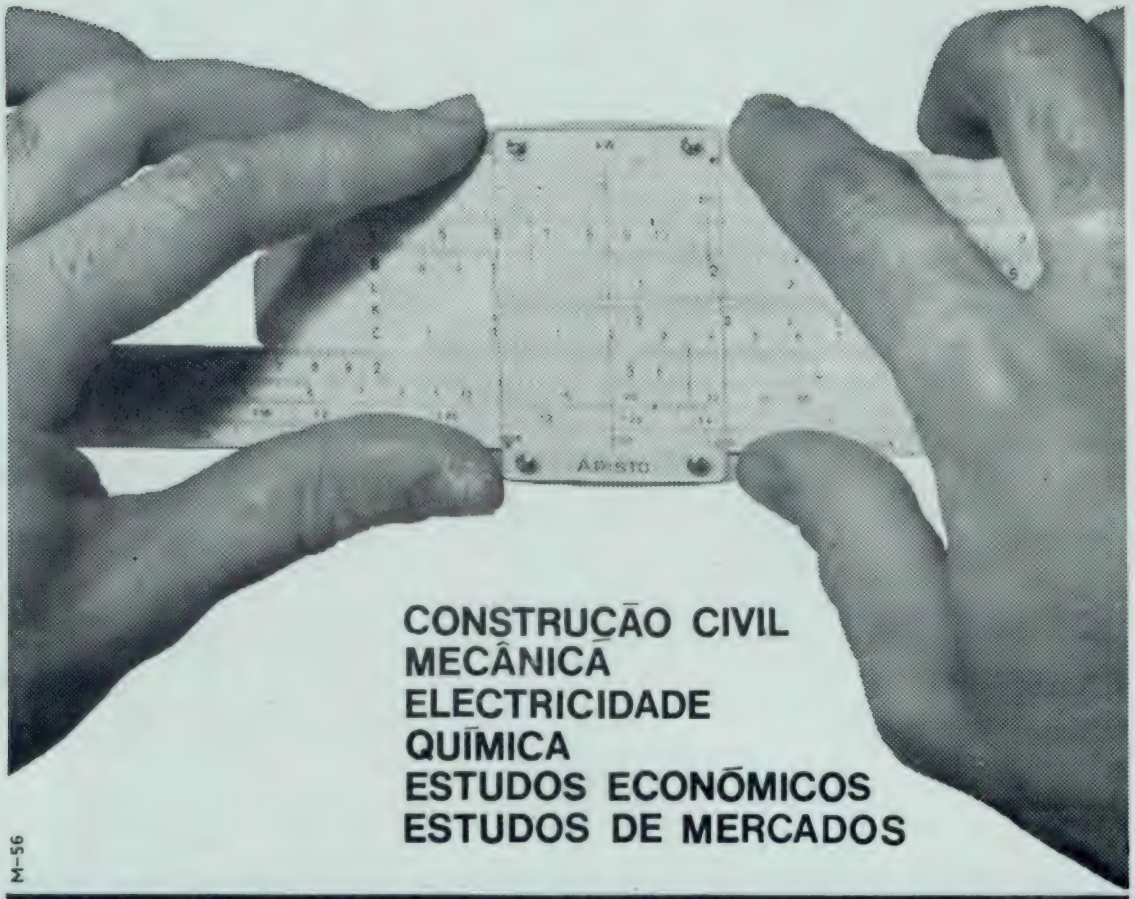
PONTE METÁLICA, COM 31,2 m DE VÃO, PARA CAMINHO DE FERRO, FORNECIDA À C. P. E INSTALADA JÁ EM MONTE DO TRIGO.

PONTES ROLANTES, GUINDASTES E APAR. DE ELEVAÇÃO ESPECIAIS	*Projecto e fabrico*
TURBINAS HIDRÁULICAS	*Fabrico segundo licença de A. C. M. de Vevey, S. A.*
TURBINAS A VAPOR	*Fabrico segundo licença de Brown Boveri, Cie.*
CALDEIRAS A VAPOR	*Projecto e fabrico segundo licença de Foster Wheeler, Co.*
EQUIPAMENTOS E INSTALAÇÕES INDUSTRIAIS	

CONSTRUÇÕES METALOMECANICAS **MAGUE** S.A.R.L

ALVERCA DO RIBATEJO — PORTUGAL

PROJECTOS COMPLETOS DE INSTALAÇÕES INDUSTRIAIS



M-56

LUSOTECNA

CONSULTORES TÉCNICOS INDUSTRIAIS, S A R L

R. PADRE A. VIEIRA, 26 - LISBOA - TEL. 688082/3

A MAIOR ORGANIZAÇÃO DO PAÍS QUE SE DEDICA EXCLUSIVAMENTE A ESTUDOS E PROJECTOS

4) Introduzindo a condição inicial (1. a) e praticando a mudança de coordenadas $\overline{f}(x, y, s) \rightarrow \overline{f}(r, s)$, (6) leva-nos a

$$\frac{\partial^3 \overline{f}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \overline{f}}{\partial r} - \left[\left(\frac{V}{2\alpha}\right)^2 + \frac{S}{\alpha}\right] \overline{f} = 0 \tag{7}$$

5) Para integração de (7) notemos que se trata duma equação de Bessel modificada, admitindo a solução

$$\overline{f} = C_1 I_0 \left[\sqrt{\left(\frac{V}{2\alpha}\right)^2 + \frac{S}{\alpha}}\, r\right] + C_2 K_0 \left[\sqrt{\left(\frac{V}{2\alpha}\right)^2 + \frac{S}{\alpha}}\, r\right] \tag{8}$$

6) Posto que $\lim_{r \to \infty} I_0 \left[\sqrt{\left(\frac{V}{2\alpha}\right)^2 + \frac{S}{\alpha}}\, r\right] = \infty$ e tendo em vista (1 . b), será $C_1 = 0$, degenerando (8) em

$$\overline{f} = C_2 K_0 \left[\sqrt{\left(\frac{V}{2\alpha}\right)^2 + \frac{S}{\alpha}}\, r\right] \tag{9}$$

7) Uma análise das alíneas anteriores mostra que podemos, agora, escrever

$$\overline{f} = C_2 e^{-\frac{V}{2\alpha} x} K_0 \left[\sqrt{\left(\frac{V}{2\alpha}\right)^2 + \frac{S}{\alpha}}\, r\right] \tag{10}$$

8) Tomando em conta (1 . c), modificada por aplicação da transformada de Laplace, ou seja

$$-2 k \pi r \frac{\partial \overline{T}}{\partial r} \longrightarrow \frac{Q}{S} \quad \text{quando } r \longrightarrow 0$$

e aplicando-a a (10) conclui-se ser

$$C_2 = \frac{Q}{2 k \pi s}$$

9)

$$\overline{T} = \frac{Q}{2 k \pi} \frac{1}{S} e^{-\frac{V}{2\alpha} x} K_0 \left[\sqrt{\left(\frac{V}{2\alpha}\right)^2 + \frac{S}{\alpha}}\, r\right] \tag{11}$$

10) Na inversão da solução estará implicado, apenas, o conjunto

$$\overline{g}(r, s) = \frac{1}{S} K_0 \left[\sqrt{\left(\frac{V}{2\alpha}\right)^2 + \frac{S}{\alpha}}\, r\right] \tag{12}$$

11) Determinação da função inversa

$$g(r, t) = \frac{1}{2 \pi i} \lim_{\beta \to \infty} \int_{\gamma - j\beta}^{\gamma + j\beta} \overline{g}(r, s)\, e^{st}\, ds \tag{13}$$

o contorno da Fig. 1, correspondente à expressão (13) será substituído pelo contorno da Fig. 2, resumindo-se as contribuições para $g(r, t)$ a:

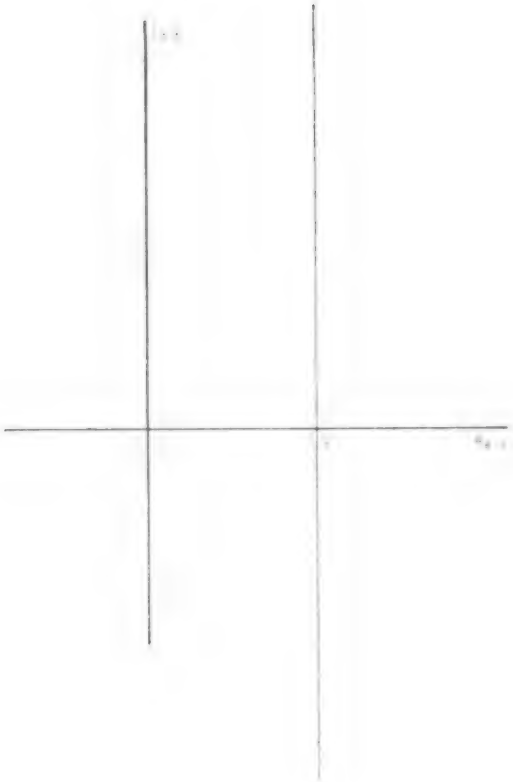


Fig. 1 — (γ terá um valor suficientemente grande para deixar à esquerda todas as singularidades de $\bar{g}$ (r , s) e st)

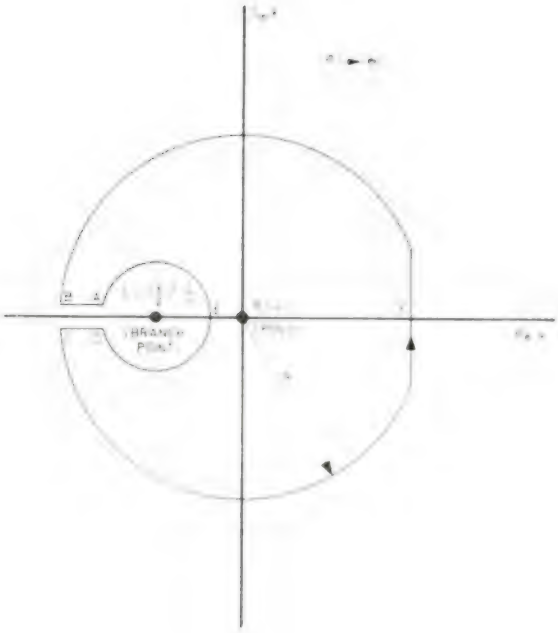


Fig. 2 — Assinaladas as singularidades da função integranda

— Resíduo da função integrada em relação ao polo $S = 0$, o seu valor será

$$k_o \left(\frac{V}{2\alpha} r \right) \tag{14}$$

— Integral estendido ao contorno BAEDC, a mudança de variável

$$\left(\frac{V}{2\sigma} \right)^2 + \frac{S}{\alpha} = u^2 \, e^{i\pi}$$

permite transformá-lo na soma de dois integrais

$$-\int_0^{\infty} \frac{[J_o (ru) - i \, Y_o (ru)] \, e^{-\alpha u^2 t} \, e^{-\frac{V^2}{4\alpha} t} \, \alpha u}{2 \left(\alpha u^2 + \frac{V^2}{4\alpha} \right)} \, du \tag{15}$$

$$-\int_0^{\infty} \frac{[J_o (ru) + i \, Y_o (ru)] \, e^{-\alpha u^2 t} \, e^{-\frac{V^2}{4\alpha} t} \, \alpha u}{2 \left(\alpha u^2 + \frac{V^2}{4\alpha} \right)} \, du \tag{16}$$

Agrupando (14), (15) e (16),

$$g(r, t) = k_0\left(\frac{V}{2\alpha} r\right) - e^{-\frac{V^2}{4\alpha} t} \int_0^{\infty} \frac{I_0(ru)\, e^{-\alpha u^2 t}\, \alpha u}{\alpha u^2 + \frac{V^2}{4\alpha}}\, du \tag{17}$$

(12) $$T = \frac{Q}{2k\pi}\, e^{-\frac{V^2}{2\alpha} x} \left[k_0\left(\frac{V}{2\alpha} r\right) - e^{-\frac{V^2}{4\alpha} t} \int_0^{\infty} \frac{J_0(ru)\, e^{-\alpha u^2 t}\, u}{u^2 + \left(\frac{V}{2\alpha}\right)^2}\, du \right] \tag{18}$$

2.1.2.2 — *Conclusões*

1) (18) verifica a equação diferencial de partida (4) e satisfaz as condições fronteiras, degenerando em (3) quando $t \to \infty$.

2) O integral contido em (15) deverá calcular-se por métodos numéricos.

3) A solução tem interesse tecnológico, em particular no que respeita à soldadura de chapas finas por processos que envolvam uma fonte móvel.

AGRADECIMENTO

Ao Instituto de Alta Cultura que, com a concessão duma bolsa de estudo, permitiu a realização deste trabalho.

BIBLIOGRAFIA

[1] — A. M. R. Marrecas, Da fonte móvel num meio infinito, Técnica n.º 372, pp 79 - 82, 1967

[2] — Rosenthal, The theory of moving sources of heat and its application to metal treatments, Trans. ASME, vol. 68, pp. 849 - 866, 1946

[3] — Van Der Pol e Bremer, Operational Calculus based on two-sided Laplace integral, Cambridge University Press, Cambridge 1959

[4] — Carlslaw e Jaeger, Conduction of heat in solids, Oxford University Press, London, 1959

[5] — Morse e Feshbach, Methods of Theoretical Physics Mcgraw-Hill, London, 1953

C. D. U. 621.311.5/91

ELEMENTOS SOBRE A PRODUÇÃO E O CONSUMO DE ENERGIA NA REDE ELÉCTRICA NACIONAL (*)

JULHO

I — Breve nota mensal

As afluências ao conjunto do sistema revelaram-se, em Julho, sensivelmente inferiores aos valores médios, tendo totalizado apenas cerca de 127 GWh, a que corresponde uma probabilidade de serem excedidas da ordem dos 85 % e um coeficiente de produtibilidade de 0,62. O carácter seco destas afluências ficou a dever-se, em parte, a um regime desfavorável de caudais transitados em Miranda, consequência de uma indisponibilidade total da central espanhola de Castro, por um período de 7 dias, durante o qual o caudal afluente a Mira foi pràticamente nulo.

As afluências acumuladas desde o início do ano hidrológico têm uma probabilidade de serem excedidas da ordem dos 77 % e representam 0,82 do respectivo valor médio.

II — Elementos gerais (GWh)

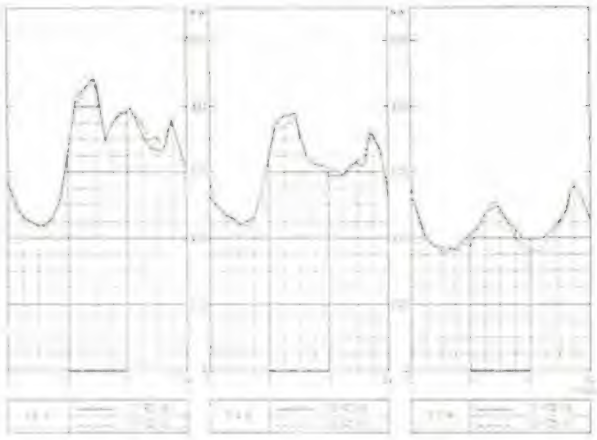
	a) Mensais 1967	a) Mensais 1968	Variação %
Produção hidráulica (P_h) . . .	439,1	360,1	— 18
Produção térmica (P_t)	17,7	120,8	+ 582
Produção total (P_T)	456,8	480,9	+ 5
Energia recebida de empresas não pertencentes ao RNC (E_r)	0,5	0,4	— 20
Exportações (Ex)	0,3	2,6	—
Importações (I)	1,2	1,9	+ 58
Saldo importador (S_I)	+ 0,9	— 0,7	—
Cons. em bomb. hidroelé. (C_b) (1)	0,0	0,0	0
Produção para consumos perman. (P_{cp}) (2)	385,1	427,4	(1) + 11,0
Produção para consumos não perman. (P_{cnp}) (3)	73,1	53,2	— 27
Total	458,2	480,6	+ 5
Coeficiente de hidraulicidade	0,73	0,62	—

NOTA:

(1) O aumento percentual da produção para consumos permanentes, tendo em conta a incidência dos domingos e dias especiais é respectivamente de 9,5 e 11,1 %.

III — Diagramas de carga dos dias característicos

			4.ª feira: 1967	4.ª feira: 1968
Produção hidráulica		(P_h) MWh	16 137	13 066
Produção térmica		(P_t) MWh	0	3 230
Produção total		(P_T) MWh	16 137	16 296
Trocas com Espanha	Export.	(Ex) MWh	0	100
	Import.	(I) MWh	5	20
Consum. em bomb. hidroel. (C_b) MWh			0	0
Prod. para cons. perm. (P_{cp}) MWh			13 651	14 695
Prod. para cons. não perm. (P_{cnp}) MWh			2 491	1 521
TOTAL		$P_T + (I - Ex)$ MWh	16 142	16 216
Características dos diagramas	$P_T + (I-Ex)$	Potência máx. MW	881	885
		Potência min. MW	438	436
		Utiliz. da ponta horas	18,3	18,3
		Factor de carga	0,76	0,76
	P_{cp}	Potência máx. MW	778	815
		Potência min. MW	331	364
		Utiliz. da ponta horas	17,5	18,0
		Factor de carga	0,73	0,75



IV — Energia armazenada nas principais albufeiras

Albufeiras:	No fim do mês: GWh	No fim do mês: % (1)
Alto Rabagão	452,6	46,5
Paradela	155,2	69,8
Venda Nova	120,6	91,2
Salamonde	26,4	95,7
Caniçada	28,4	85,8
Vilar	51,1	53,8
Cabril	251,9	74,2
Castelo do Bode	105,7	64,8
Guilhofrei	6,2	71,7
Lagoa Comprida	33,4 (2)	86,3
Santa Luzia	56,5	91,7
Pracana	11,1	86,0
Póvoa	11,2 (3)	89,4
Total — com A. Rabagão . . .	1 313,3	61,9
Total — sem A. Rabagão . . .	860,7	74,9

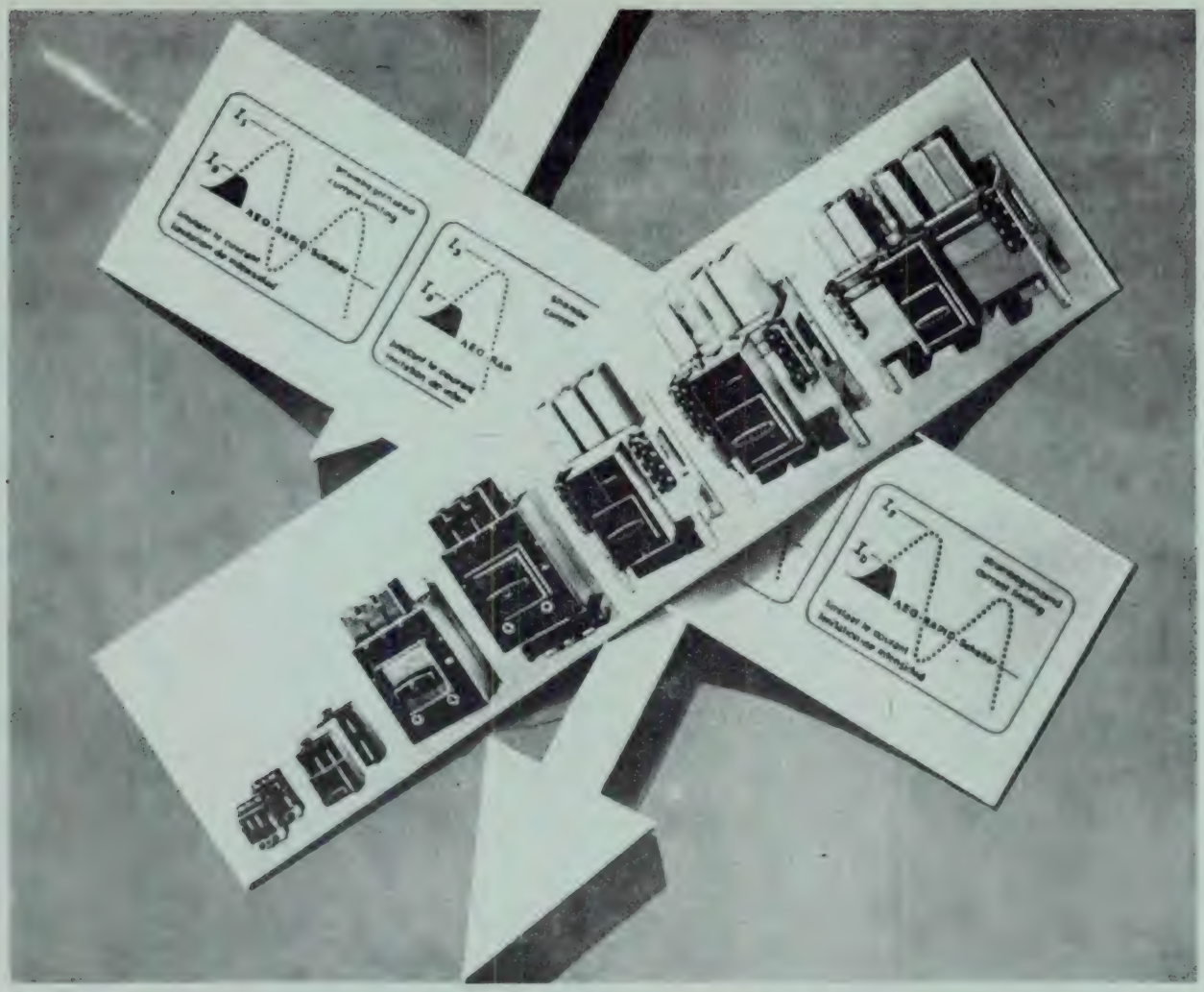
NOTAS

(1) Coeficiente de enchimento em energia das albufeiras.

(2) Inclui 3,2 GWh armazenados em Vale do Rossim no início do mês e 2,8 GWh no fim do mês.

(3) Inclui 1,0 GWh armazenados no açude do Poio no início do mês e 1,7 GWh no fim do mês.

(*) *Elementos extraídos das estatísticas mensais do Repartidor Nacional de Cargas (R. N. C.). As produções e os consumos das empresas do R. N. C. representam cerca de 94 % dos totais do País.*



dist Belarte

Qualquer destes nove-tipos de disjuntores é mais rápido do que o curto-circuito

AEG

Os disjuntores AEG-RAPID são disjuntores limitadores de corrente. A sua rapidez de actuação é tal, que qualquer curto-circuito é eliminado logo à nascença.

Os disjuntores AEG-RAPID limitam a grandeza e a duração duma corrente de curto-circuito à valores inofensivos. Com estes disjuntores, a instalação fica sòmente submetida a 20 % de solicitação dinâmica, ao contrário do que sucedia com os disjuntores de construção mais antiga. Assim, deixam de verificar-se as usuais quebras de apoios e deformações dos barramentos. Há sòmente que contar com 10 % de sobrecarga térmica, eliminando-se assim incêndios em cabos e celas. Por outro lado, não surgem deteriorações resultantes de arcos voltaicos migratórios, na medida em que o curto-circuito fica limitado ao local onde se originou.

Como vantagem consequente teremos Produção processual sem interferências e sem avarias secundárias. O disjuntor AEG-RAPID é fabricado para a gama de 16 A a 2000 A, 500 V 3~ e um poder de corte até 100 kA.

Aproveite V. a oportunidade, elabore os projectos do futuro, recorrendo a disjuntores de avançada concepção técnica.

A AEG está sempre, com prazer, ao v/ dispor para quaisquer esclarecimentos.

em toda a parte aparelhagem de corte AEG *

* um sinal de progresso, segurança e confiança

AEG-LUSITANA DE ELECTRICIDADE

ESTAMPARIAS TINTURARIAS LAVANDARIAS

PARA OS VOSSOS TECIDOS TÉCNICOS:
TRANSPORTADORES, MANCHONS, LAPPING, WOLFRIES,
FLANELAS, CANEVAS, ETC.,

EM FIBRAS NATURAIS OU SINTÉTICAS

CONSULTEM:

FANAFEL

FÁBRICA NACIONAL DE FELTROS INDUSTRIAIS
SOCIEDADE LIMITADA

APART.: 9
TELEFS.: 52093-52094
TELEG.: FELTROS

OVAR
PORTUGAL

ESCRITÓRIO E FÁBRICA
ESTRADA DE S. JOÃO

Empresa Ultramarina de Sondagens e Fundações, L.da

(SONDADORA)

SONDAGENS geológicas e geotécnicas — CAPTAÇÕES de águas subterrâneas — REBAIXAMENTOS do nível freático — CONSOLIDAÇÕES E ESTABILIZAÇÃO do solo — INJECÇÕES DE CIMENTO e outros produtos — INFRAESTRUTURAS de barragens, túneis e pontes — FUNDAÇÕES de todos os tipos

Única Empresa da especialidade com sede no Ultramar Português

DELEGAÇÃO - LISBOA
R.S.Pedro de Alcântara, 1
Tel. 32 46 93 e 21 32 56

SEDE - LUANDA
Rua Serpa Pinto, 60
C.P.2178 - Tel.4226

MOÇAMBIQUE
L.Marques - C.P.982 - Tel.74 11 21
Beira - C.P. 1002 - Tel. 71497

C. D. U. 624.042.5

O EFEITO DAS VARIAÇÕES TÉRMICAS SINUSOIDAIS NAS ESTRUTURAS LAMINARES DE COMPORTAMENTO ELÁSTICO LINEAR

por J. F. LOBO FIALHO *
M. MACHADO GONÇALVES **

SUMÁRIO

Os estados de tensão criados numa peça laminar de betão pelas oscilações térmicas ambientes podem ser analisados por métodos numéricos, se se considerarem aceitaveis determinadas hipóteses relativas à transmissão do calor e às propriedades termo-elásticas do betão. Depois de se formularem as bases para esta análise, desenvolve-se um método de cálculo numérico em termos das componentes dos deslocamentos de pontos discretos duma casca de geometria arbitrária.

O método é exemplificado na análise do estado de tensão duma barragem casca submetida às oscilações anuais de temperatura.

SYNOPSIS

The state of stress in a concrete shell due to the surrounding temperature changes can be analyzed by numerical methods if some hypotheses concerning heat transmissions. and thermo-elastic characteritics of the concrete are accepted

In the present work the basis for this numerical analysis is developed for shells with arbitrary shapes. The proposed method is exemplified in study of stress in a shell dam due to the annual temperature variations.

NOTAÇÕES

x, y, z, X, Y, Z — coordenadas cartesianas ortogonais
ξ, η, ζ, — coordenadas curvilíneas ortognais
l, m, n cossenos directores duma normal à superfície média
u, v, w, U, V, W — componentes do deslocamento
t — variável tempo
θ — temperatura (°C)
ε — extensão
γ — distorção
τ — tensão tangencial
E — módulo de elasticidade longitudinal
G — módulo de elasticidade transversal.
ν — coeficiente de Poisson
α — coeficiente de dilatação térmica
N — esforço normal
T — esforço tangencial
M — momento flector
$\mathfrak{M}$ — momento de torção
Q — esforço transverso
} por unidade de comprimento da peça linear

1 — GENERALIDADES

O efeito das variações térmicas nas estruturas laminares de betão ou betão armado utilizadas na construção (coberturas em casca, lajes, abóbadas delgadas, etc.) pode ser feito em primeira aproximação, admitindo que são sinusoidais as oscilações da temperatura ambiente. Conforme a espessura da estrutura laminar, assim a predominância da onda sinusoidal diurna ou da onda anual no estado de tensão gerado pelos gradientes térmicos.

A fixação da onda térmica predominante, isto é, do seu período e da sua amplitude, depende de numerosos parâmetros geométricos e de exposição da obra, bem como de condições meteorológicas ambientes, que não serão analisados no presente trabalho. Este visa fundamentalmente o estudo do estado de tensão gerado numa peça laminar de geometria arbitrária, supostas conhecidas as oscilações sinusoidais da temperatura ambiente na proximidade das suas superfícies.

* Engenheiro Civil, LNEC.
** Engenheiro da Universidade Católica do Rio de Janeiro, Bolseiro da Fundação C. Gulbenkian.

Para realizar este estudo consideraram-se as seguintes hipóteses:

a) A peça laminar é homogénea e simplesmente conexa.

b) O material de que se constitui é isotrópico e linearmente elástico, mantendo estas propriedades, bem como as constantes elásticas dentro da amplitude de oscilação considerada.

c) O problema termoelástico é do tipo "quase-estático", isto é, o período da oscilação térmica é tão longo que se podem despresar os fenómenos de inércia e os termos de acoplamento termo-mecânico [1].

As hipóteses (*a*) e (*b*) são admissíveis, visto que o betão e o betão armado, dentro das amplitudes de oscilação térmica ambiente se podem considerar como um comportamento hookeano.

A hipótese (*c*) tem sido aceite por numerosos autores quando as variações térmicas são lentas comparadas com a velocidade de transmissão do calor através da peça laminar. Ela permite simplificações importantes nas equações de equilíbrio tornando possível um tratamento numérico do problema.

2 — ESTADOS DE TENSÃO E DEFORMAÇÃO TERMOELÁSTICOS

Considere-se uma peça estrutural a três dimensões referida a um sistema de eixos ortogonais cartesianos O X Y Z suposta no *estado neutro* à temperatura constante θ_0. Por estado neutro entende-se aquele em que os elementos de volume estão todos indeformados e sem tensões iniciais [2]. Suponhamos que esta peça é submetida num dado instante a uma variação de temperaturas $\bar{\theta} = \theta - \theta_0$ uniforme em todos os seus pontos. Se a peça não tiver ligações que impeçam a livre dilatação de qualquer dos seus elementos de volume, isto é, se não houver fenómenos de *coacção* e além disso a variação de temperatura se fizer em regime "quase-estático", ter-se-á um *estado de deformação total*

$$\varepsilon_{ij} = \delta_{ij}\, \alpha\, \bar{\theta} \qquad (1)$$

a que correspondem as expressões escalares

$$\varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_z = \alpha\, \bar{\theta} \qquad (1\ a)$$

$$\gamma_{xy} = \gamma_{xz} = \gamma_{zy} = 0 \qquad (1\ b)$$

As tensões normais e tangenciais em qualquer ponto serão portanto nulas visto que todos os elementos de volume se podem dilatar livremente sem efeitos de inércia. Se, pelo contrário, como será em geral o caso, for criado um *estado de coacção* às dilatações térmicas devido a uma distribuição não linear de temperaturas ao longo de uma secção da peça ou a uma *ligação de coacção*, aparecerá na peça um *estado de tensão de coacção* σ^c_{ij} não nulo e um *estado de deformação termo-elástico* ε^θ_{ij} diferente do dado por (1). O estado de tensão de coacção é resultante dum estado de defor-

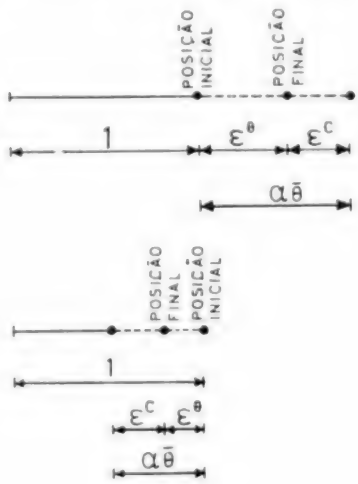


Fig. 1

mação de coacção $\varepsilon^c_{ij} = \varepsilon^\theta_{ij} - \varepsilon_{ij}$ (Fig. 1) a que corresponde a expressão tensorial

$$\varepsilon^c_{ij} = \varepsilon^\theta_{ij} - \delta_{ij}\, \alpha\, \bar{\theta} \qquad (2)$$

Esta expressãs pode desdobrar-se nas 6 relações escalares

$$\varepsilon^c_x = \varepsilon^\theta_x - \alpha\, \bar{\theta}$$

$$\varepsilon^c_y = \varepsilon^\theta_y - \alpha\, \bar{\theta} \qquad (2\ a)$$

$$\varepsilon^c_z = \varepsilon^z - \alpha\, \bar{\theta}$$

$$\gamma^c_{xy} = \gamma^\theta_{xy}$$

$$\gamma^c_{xz} = \gamma^\theta_{xz} \qquad (2\ b)$$

$$\gamma^c_{yz} = \gamma^\theta_{yz}$$

Se o material da peça estrutural se mantiver isotròpicamente elástico conservando as respectivas constantes, ter-se-á:

$$\sigma^c_{ij} = C_{ijkl}\ \varepsilon^c_{kl} \tag{3}$$

a que correspondem as expressões:

$$\sigma^c_x = \frac{E}{(1-2\nu)\ (1+\nu)}\left[(1-\nu)\,\varepsilon^c_x + \nu\,(\varepsilon^c_y + \varepsilon^c_z)\right]$$

$$\sigma^c_y = \frac{E}{(1-2\nu)\ (1+\nu)}\left[(1-\nu)\,\varepsilon^c_y + \nu\,(\varepsilon^c_x + \varepsilon^c_z)\right] \tag{3 a}$$

$$\sigma^c_z = \frac{E}{(1-2\nu)\ (1+\nu)}\left[(1-\nu)\,\varepsilon^c_z + \nu\,(\varepsilon^c_x + \varepsilon^c_y)\right]$$

$$\tau^c_{xy} = G\ \gamma^c_{xy}$$

$$\tau^c_{xz} = G\ \gamma^c_{xz} \tag{3 b}$$

$$\tau^c_{yz} = G\ \gamma^c_{yz}$$

Substituindo os valores de ε^c_{ij} pelas suas expressões (2 a) e (2 b) ter-se-á:

$$\sigma^c_x = \frac{E}{(1-2\nu)\ (1+\nu)}\left[(1-\nu)\,\varepsilon^\theta_x + \nu\,(\varepsilon^\theta_y + \varepsilon^\theta_z) - (1+\nu)\,\alpha\,\overline{\theta}\right] = \sigma^\theta_z - \frac{E\,\alpha\,\overline{\theta}}{1-2\nu}$$

$$\sigma^c_y = \frac{E}{(1-2\nu)\ (1+\nu)}\left[(1-\nu)\,\varepsilon^\theta_y + \nu\,(\varepsilon^\theta_y + \varepsilon^\theta_x) - (1+\nu)\,\alpha\,\overline{\theta}\right] = \sigma^\theta_y - \frac{E\,\alpha\,\overline{\theta}}{1-2\nu} \tag{4 a}$$

$$\sigma^c_z = \frac{E}{(1-2\nu)\ (1+\nu)}\left[(1-\nu)\,\varepsilon^\theta_z + \nu\,(\varepsilon^\theta_z + \varepsilon^\theta_y) - (1+\nu)\,\alpha\,\overline{\theta}\right] = \sigma^\theta_x - \frac{E\,\alpha\,\overline{\theta}}{1-2\nu}$$

$$\tau^c_{xy} = \tau^\theta_{xy}$$

$$\tau^c_{xz} = \tau^\theta_{xz} \tag{4 b}$$

$$\tau^c_{yz} = \tau^\theta_{yz}$$

Sendo σ^θ_{ij} o estado da tensão que produz na peça o estado de deformação termo-elástico.

O estado de tensão de coacção deverá satisfazer as aquações de equilíbrio indefinido quando nulas as forças de massa, isto é:

$$\frac{\partial\,\sigma^c_x}{\partial x} + \frac{\partial\,\tau^c_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial\,\tau^c_{xz}}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial\,\sigma^c_y}{\partial y} + \frac{\partial\,\tau^c_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial\,\tau^c_{yz}}{\partial z} = 0 \tag{5}$$

$$\frac{\partial\,\sigma^c_z}{\partial z} + \frac{\partial\,\tau^c_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial\,\tau^c_{yz}}{\partial y} = 0$$

e às condições de equilíbrio na fronteira quando nulas as forças de superfície:

$$l\,\sigma^c_x + m\,\tau^c_{xy} + n\,\tau^c_{xz} = 0$$

$$l\,\tau^c_{xy} + m\,\sigma^c_y + n\,\tau^c_{yz} = 0 \tag{6}$$

$$l\,\tau^c_{xz} + m\,\tau^c_{yz} + n\,\sigma^c_z = 0$$

Se substituirmos em (5) e (6) os valores das componentes de σ^c_{ij} pelas suas expressões (4 a) e (4 b) obteremos as equações de equilíbrio indefinido:

$$\frac{\partial\,\sigma^\theta_x}{\partial x} + \frac{\partial\,\tau^\theta_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial\,\tau^\theta_{xz}}{\partial z} - \frac{E}{(1-2\nu)}\,\alpha\,\frac{\partial\overline{\theta}}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial\,\sigma^\theta_y}{\sigma y} + \frac{\partial\,\tau^\theta_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial\,\tau^\theta_{yz}}{\partial z} \quad \frac{E}{(1-2\nu)}\,\alpha\,\frac{\partial\overline{\theta}}{\partial y} = 0 \tag{7}$$

$$\frac{\partial\,\sigma^\theta_z}{\partial z} + \frac{\partial\,\tau^\theta_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial\,\tau^\theta_{yz}}{\partial y} - \frac{E}{(1-2\nu)}\,\alpha\,\frac{\partial\overline{\theta}}{\partial z} = 0$$

e as equações de equilíbrio na fronteira

$$l\,\sigma^\theta_x + m\,\tau^\theta_{xy} + n\,\tau^\theta_{xz} - \frac{E}{(1-2\nu)}\,l\,\alpha\,\overline{\theta} = 0$$

$$l\,\tau^\theta_{xy} + m\,\sigma^\theta_y + n\,\tau^\theta_{zy} - \frac{E}{(1-2\nu)}\,m\,\alpha\,\overline{\theta} = 0 \tag{8}$$

$$l\,\tau^\theta_{xz} + m\,\tau^\theta_{yz} + n\,\sigma^\theta_z - \frac{E}{(1-2\nu)}\,n\,\alpha\,\overline{\theta} = 0$$

A análise das expressões (7) e (8) permite enunciar a seguinte analogia atribuída a DUHAMEL [1].

O estado de deformação termo-elástico é idêntico ao que se observaria se a peça fosse solicitada por forças de massa

$$X_i = -\frac{E}{(1-2\nu)}\,\alpha\,\frac{\partial\,\overline{\theta}}{\partial\,x_i} \tag{9}$$

e forças de superfície

$$\overline{X}_i = - \frac{E}{(1-2\nu)} l_i \alpha \overline{\theta} \qquad (10)$$

O estado de tensão de coacção obtém-se das expressões (4 a) e (4 b) que têm na notação tensorial a forma:

$$\sigma^c_{ij} = \sigma^\theta_{ij} - \delta_{ij} \frac{E}{1-2\nu} \alpha \overline{\theta} \qquad (11)$$

3 — CASO PARTICULAR DAS ESTRUTURAS LAMINARES

A analogia anteriormente exposta pode ser generalizada ao estudo das variações térmicas das estruturas laminares. As respectivas expressões devem porém ser formuladas nas variáveis habituais da teoria das cascas.

As equações de equilíbrio indefinido em termos dos 8 esforços de casca, N_ξ, N_η, $T_{\xi\eta}$, M_ξ, M_η, $\mathcal{M}_{\xi\eta}$, Q_ξ e Q_η, segundo as coordenadas ξ, η e ζ têm a seguinte forma [8]:

$$\frac{DN_\xi}{D\xi} + \frac{DT_{\xi\eta}}{D\eta} + \frac{N_\eta - N_\xi}{R^\beta_\xi} - \frac{2\,T_{\xi\eta}}{R^\alpha_\eta} + \frac{Q_\xi}{R^\alpha_\zeta} - \frac{Q_\eta}{R^{\alpha\beta}} + f_\xi = 0$$

$$\frac{DN_\eta}{D\eta} + \frac{DT_{\xi\eta}}{D\xi} + \frac{N_\xi - N_\eta}{R^\alpha_\eta} - \frac{2\,T_{\xi\eta}}{R^\beta_\xi} + \frac{Q_\eta}{R^\beta_\zeta} - \frac{Q_\xi}{R^{\alpha\beta}} + f_\eta = 0 \qquad (12)$$

$$\frac{N_\xi}{R^\alpha_\zeta} + \frac{N_\eta}{R^\beta_\zeta} - \frac{2\,T_{\xi\eta}}{R^{\alpha\beta}} - \frac{DQ_\xi}{D\xi} - \frac{DQ_\eta}{D\eta} + \frac{Q_\xi}{R^\beta_\xi} + \frac{Q_\eta}{R^\alpha_\eta} + f_\zeta = 0$$

Sendo $1/R^\alpha_\xi$, $1/R^{\alpha\beta}$ e $1/R^\beta_\xi$ componentes do tensor de curvatura nas direcções ξ e η; R^β_ξ e R^α_η os raios de curvatura geodésica no ponto considerado e $\{ f_\xi, f_\eta, f_\zeta \}$ o vector solicitação referido à unidade de área da superfície média; $D/D\xi$ e $D/D\eta$ são derivações totais (substanciais) ao longo das abcissas curvilíneas ξ e η traçadas sobre uma rede de curvas paramétricas ortogonais existentes na superfície média da casca.

Entre os esforços de flexão M_ξ e M_η, de torção $\mathcal{M}_{\xi\eta}$ e os esforços transversos Q_ξ e Q_η existem as seguintes relações de equilíbrio:

$$\frac{DM_\xi}{D\xi} + \frac{D\,\mathcal{M}_{\xi\eta}}{D\eta} - \frac{2\,\mathcal{M}_{\xi\eta}}{R^\alpha_\eta} + \frac{M_\eta - M_\xi}{R^\beta_\xi} - Q_\xi = 0$$

$$\frac{DM_\eta}{D\eta} + \frac{D\,\mathcal{M}_{\xi\eta}}{D\xi} - \frac{2\,\mathcal{M}_{\xi\eta}}{R^\beta_\xi} + \frac{M_\xi - M_\eta}{R^\alpha_\eta} - Q_\eta = 0 \qquad (13)$$

Substituindo os valores de Q_ξ e Q_η dados pelas expressões (13) nas equações (12) obtêm-se 3 equações diferenciais relacionando apenas os esforços N_ξ, N_η, M_ξ, M_η, $T_{\xi\eta}$ e $\mathcal{M}_{\xi\eta}$.

Entre estes esforços generalizados e as correspondentes deformações generalizadas* da superfície média, ε_ξ, ε_η, k_ξ, k_η, $\gamma_{\xi\eta}$, τ_ξ e τ_η, existem as relações

$$\begin{aligned} N_\xi &= K_a (\varepsilon_\xi + \nu \varepsilon_\eta) \\ N_\eta &= K_a (\varepsilon_\eta + \nu \varepsilon_\xi) \\ T_{\xi\eta} &= K_d \gamma_{\xi\eta} \\ M_\xi &= K_f (k_\xi + \nu k_\eta) \\ M_\eta &= K_f (k_\eta + \nu k_\xi) \\ \mathcal{M}_{\xi\eta} &= K_t \tau_\xi = K_t \tau_\eta \end{aligned} \qquad (14)$$

sendo K_a, K_d, K_f e K_t, os módulos de rigidez axial, tangencial, de flexão e de torção, dados respectivamente pelas expressões:

$$K_a = \frac{E\,e}{(1-\nu^2)}$$

$$K_d = \frac{E\,e}{2\,(1+\nu)} \qquad (15)$$

(*) ε_ξ, ε_η — extensões da superfície média segundo as direcções ξ e η.

$\gamma_{\xi\eta}$ — distorção da superfície média nas direcções ξ e η.

k_ξ, k_η — variações de curvatura da superfície média segundo ξ e η.

τ_ξ, τ_η — variações de torção segundo ξ e η.

$$K_f = \frac{E\, e^3}{12\,(1-\nu^2)}$$

$$K_t = \frac{E\, e^3}{24\,(1+\nu)}$$

Postas estas questões de base da formulação geral da teoria das cascas, analisemos o que se passa na estrutura laminar quando esta sofre uma variação de temperatura $\overline{\theta}\,(\xi, \eta)$ num ponto genérico da superfície média com uma variação (linear) $\overline{\overline{\theta}}\,(\xi, \eta)$ entre os dois pontos situados nos paramentos (Fig. 2).

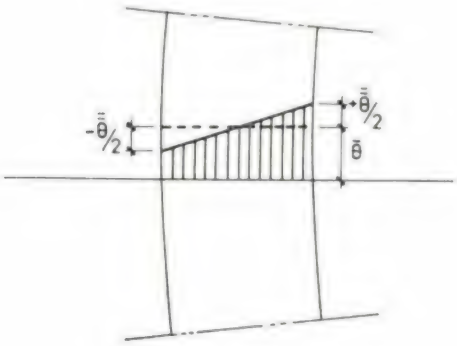


Fig. 2

Em virtude desta variação de temperatura, as deformações de coacção em cada ponto da superfície média da casca são:

$$\varepsilon^c_\xi = \varepsilon^\theta_\xi - \alpha\,\overline{\theta}$$

$$\varepsilon^c_\eta = \varepsilon^\theta_\eta - \alpha\,\overline{\theta} \qquad (16a)$$

$$\gamma^c_{\xi\eta} = \gamma^\theta_{\xi\eta}$$

$$k^c_\xi = k^\theta_\xi - \alpha\,\frac{\overline{\overline{\theta}}}{e}$$

$$k^c_\eta = k^\theta_\eta - \alpha\,\frac{\overline{\overline{\theta}}}{e} \qquad (16b)$$

$$\tau^c_\xi = \tau^\theta_\xi$$

onde ε^θ, γ^θ, k^θ e τ^θ são as componentes do estado de deformação termo-elástico.

Note-se que as expressões (16 a) e (16 b) correspondem às expressões (2 a) e (2 b) da formulação elástica tri-dimensional em coordenadas cartesianas ortogonais.

Substituindo (16 a) e (16 b) nas expressões (14), obtém-se:

$$N^c_\xi = N^\theta_\xi - K_a\,(1+\nu)\,\alpha\,\overline{\theta}$$

$$N^c_\eta = N^\theta_\eta - K_a\,(1+\nu)\,\alpha\,\overline{\theta} \qquad (17a)$$

$$T^c_{\xi\eta} = T^\theta_{\xi\eta}$$

$$M^c_\xi = M^\theta_\xi - K_f\,(1+\nu)\,\frac{\alpha\,\overline{\overline{\theta}}}{e}$$

$$M^c_\eta = M^\theta_\eta - K_f\,(1+\nu)\,\frac{\alpha\,\overline{\overline{\theta}}}{e} \qquad (17b)$$

$$\mathcal{M}^c_{\xi\eta} = \mathcal{M}^\theta_{\xi\eta}$$

sendo N^c, T^c, M^c, e $\mathcal{M}^c$ os esforços de coacção e N^θ, T^θ, M^θ e $\mathcal{M}^\theta$ os esforços que produzem o estado de deformações termo-elástico. Note-se que as expressões (17) correspondem às expressões (11) da formulação cartesiana. Substituindo as expressões (17) nas equações de equilíbrio (12) depois de eliminados os valores de Q_ξ e Q_η a partir de (13) e fazendo-se ainda $f_\xi = f_\eta = f_\zeta = 0$, obtêm-se três equações de equilíbrio em tudo análogas às equações de equilíbrio que se obteriam se as componentes da solicitação actuante fossem:

$$f^\theta_\xi = (1+\nu)\,\alpha\left[\frac{D\,(K_a\,\overline{\theta})}{D\,\xi} + \frac{1}{R^\alpha_\xi}\,\frac{D\,\left(\frac{K_f\,\overline{\overline{\theta}}}{e}\right)}{D\,\xi} - \frac{1}{R^{\alpha\beta}}\,\frac{D\,\left(\frac{K_f\,\overline{\overline{\theta}}}{e}\right)}{D\,\eta}\right]$$

$$f^\theta_\eta = (1+\nu)\,\alpha\left[\frac{D\,(K_a\,\overline{\theta})}{D\,\eta} + \frac{1}{R^\beta_\xi}\,\frac{D\,\left(\frac{K_f\,\overline{\overline{\theta}}}{e}\right)}{D\,\eta} - \frac{1}{R^{\alpha\beta}}\,\frac{D\,\left(\frac{K_f\,\overline{\overline{\theta}}}{e}\right)}{D\,\xi}\right] \qquad (18\,a)$$

$$f_{\zeta}^{\theta} = (1+\nu)\,\alpha \left[\frac{K_a\,\theta}{R_{\xi}^{\alpha}} + \frac{K_a\,\theta}{R_{\eta}^{\beta}} + \right.$$

$$+ \frac{1}{R_{\xi}^{\beta}} \frac{D\left(\frac{K_f\,\overline{\overline{\theta}}}{e}\right)}{D\,\xi} + \frac{1}{R_{\eta}^{\alpha}} \frac{D\left(\frac{K_f\,\overline{\overline{\theta}}}{e}\right)}{D\,\eta} -$$

$$\left. - \frac{D^2\left(\frac{K_f\,\overline{\overline{\theta}}}{e}\right)}{D\,\xi^2} - \frac{D^2\left(\frac{K_f\,\overline{\overline{\theta}}}{e}\right)}{D\,\eta^2} \right]$$

Estas forças fictícias podem considerar-se como correspondendo nas cascas às forças de massa (9) da analogia de DUHAMEL nos equilíbrios elásticos tri-dimensionais.

No caso da estrutura laminar possuir um bordo livre normal à direcção arbitrária η_0, deverão observar-se nele as seguintes condições de fronteira:

$$N_{\eta o}^{c} = M_{\eta o}^{c} = T_{\xi \eta o}^{c} = \mathcal{M}_{\xi \eta o}^{c} = 0 \qquad (18b)$$

as quais, substituídas em (17a) e (17b) correspondem à aplicação de forças fictícias no bordo livre:

$$f_{\eta o}^{\theta} = (1+\nu)\,\alpha\,K_a^{\overline{\theta}} \qquad (18c)$$

e a momentos fictícios no bordo livre:

$$M_{\eta o}^{\theta} = (1+\nu)\,\alpha\,\frac{K_f\,\overline{\overline{\theta}}}{e} \qquad (18d)$$

que podem considerar-se corresponder nas cascas às forças de superfície (10) da analogia de DUHAMEL.

Note-se que em geral se pode considerar no bordo livre $\overline{\overline{\theta}} = 0$, donde $M_{\eta o}^{\theta} = 0$.

4 – DETERMINAÇÃO DAS TEMPERATURAS $\overline{\theta}$ e $\overline{\overline{\theta}}$

A formulação desenvolvida no parágrafo anterior permite calcular em cada ponto as componentes f_{ξ}^{θ}, f_{η}^{θ} e f_{ζ}^{θ} da solicitação fictícia que produz, juntamente com as forças de bordo, na peça laminar, deformações idênticas às deformações termo-elásticas. As expressões (18) mostram que este cálculo só pode ser feito desde que se conheça a distribuição das temperaturas $\overline{\theta}$ e $\overline{\overline{\theta}}$ em cada ponto da peça laminar.

Sendo a variação de temperatura ambiente sinusoidal de pulsação ω prova-se [3] que também o serão as temperaturas $\overline{\theta}$ e $\overline{\overline{\theta}}$, possuindo estas a mesma pulsação.

Suponha-se que a peça laminar é uma placa indefinida de espessura constante e. Sejam:

$$\theta_m = \theta_m^{o} + A_m \cos\omega t$$
$$\theta_j = \theta_j^{o} + A_j \cos\omega t \qquad (19)$$

as variações de temperatura ambiente do lado da face m e da face j (fig. 3), as quais têm respectivamente as amplitudes A_m e A_j, oscilando em torno das temperaturas médias θ_m^{o} e θ_j^{o}.

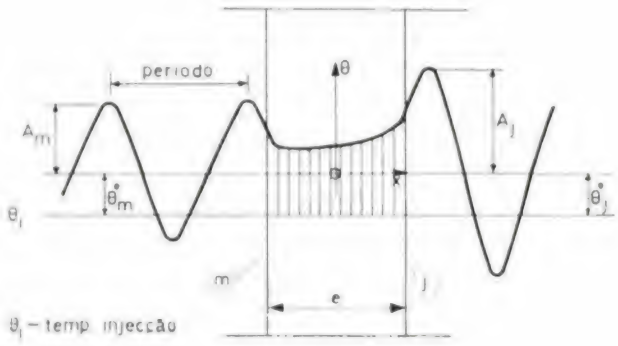


Fig. 3

Integrando a equação de FOURIER da transmissão de calor aplicada à placa indefinida, supostas as suas faces submetidas às variações térmicas ambientes, expressas por (19), RITTER obteve [4] para um ponto interior de abcissa x:

$$\theta = \sqrt{\varphi^2 + \psi^2}\,\cos\left[\omega t - \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{\psi}{\varphi}\right)\right]\,\theta_m^{o} + \left(\frac{\theta_j^{o} - \theta_m^{o}}{e}\right) x \qquad (20)$$

sendo:

$$\varphi = A_m\,(\cos\mu x\,\mathrm{sh}\,\mu x + B'\cos\mu x\,\mathrm{sh}\,\mu x + C'\,\mathrm{sen}\,\mu x\,\mathrm{ch}\,\mu x) \qquad (21)$$

$$\psi = A_m\,(-\text{sen}\mu x\ \text{sh}\mu x - B'\ \text{sen}\mu x\ \text{ch}\mu x + C'\ \cos\mu x\ \text{sh}\mu x)$$

em que

$$B' - \text{sh}\mu e\ \frac{n\ \cos\mu e - \text{ch}\mu e}{\text{ch}^2\mu e - \cos^2\mu e}$$

$$C' = \text{sen}\mu v\ \frac{n\ \text{sh}\mu e - \cos\mu e}{\text{ch}\mu e - \cos^2\mu e} \qquad (22\ b)$$

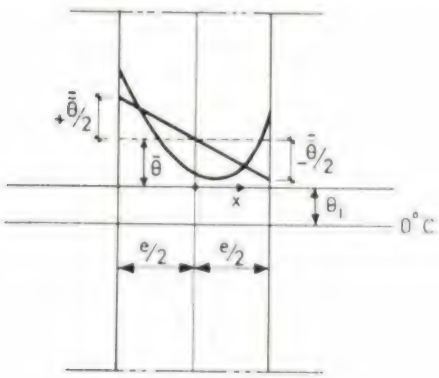
$$n = \frac{A_i}{A_m} \qquad (23)$$

e μ uma constante relacionada com a massa específica γ, o calor específico C, a condutibilidade térmica λ e a pulsação ω, pela expressão:

$$\mu = \sqrt{\frac{\gamma\,\omega\,C}{2\,\lambda}} \qquad (24)$$

Vê-se assim que a temperatura num ponto do interior da placa varia sinusoidalmente com um período $T = 2\ \pi/\omega$ em torno duma temperatura média $\theta = \theta_m^o + \left(\frac{\theta_i^o - \theta_m^o}{e}\right) x$ com uma amplitude $A = \sqrt{\varphi^2 + \psi^2}$, apresentando, em relação às oscilações da temperatura ambiente supostas em fase de um e outro lado da placa, um desfasamento igual a arct. tg $\left(\frac{\psi}{\varphi}\right)$.

O facto da distribuição das temperaturas ao longo duma normal à placa se fazer segundo uma lei não linear (fig.) 4) que varia de instante



θ_i—temp.ª de referência

Fig. 4

para instante levou RITTER ao estabelecimento de dois artifícios para o calculo das temperaturas: equivalentes $\bar{\theta}$ e $\bar{\bar{\theta}}$:

a) Procurou uma distribuição linear de temperaturas ao longo da espessura da placa de efeitos equivalentes aos da distribuição real, isto é, produzindo a mesma translação e a mesma rotação duma normal à placa.

b) Considerou, dentro dos diagramas lineares, apenas o mais desfavorável, isto é, o que correspondia à maior translação e rotação.

O artifício (a) permite a determinação da temperatura média $\bar{\theta}$ do diagrama linear equivalente:

$$\bar{\theta} = \frac{1}{e}\int_{-e/2}^{e/2} \theta\,dx \qquad (25)$$

e a sua variação $\bar{\bar{\theta}}$:

$$\bar{\bar{\theta}} = \pm\frac{12}{e^2}\int_{-e/2}^{e/2} \theta\ x\,dx \qquad (26)$$

Substituindo em (25) e (26) os valores de θ dados por (26) e calculados os valores extremos de $\bar{\theta}$ e $\bar{\bar{\theta}}$ a partir da anulação das respectivas derivadas relativamente à variável tempo, tem-se:

$$\bar{\theta}_{extr.} = \frac{1}{e}\sqrt{\left(\int_{-e/2}^{e/2} x\,dx\right)^2 + \left(\int_{-e/2}^{e/2} x\,dx\right)^2} + \frac{\theta_i^o + \theta_m^e}{2} \qquad (27)$$

$$\bar{\bar{\theta}}_{extr.} = \pm\frac{6}{C^2}\sqrt{\left(\int_{-e/2}^{e/2} \varphi\,x\,dx\right)^2 + \left(\int_{-e/2}^{e/2} \psi\,x\,dx\right)^2} + \frac{\theta_i^o - \theta_m}{2} \qquad (28)$$

sendo, de acordo com (21):

$$\int_{-e/2}^{e/2} \varphi\,dx = \frac{A_m\,(1+n)}{2\,\mu}\ \frac{\text{sh}\,\mu\,e + \text{sen}\,\mu\,e}{\text{ch}\,\mu\,e + \cos\mu\,e} \qquad (29)$$

$$\int_{-e/2}^{e/2} dx = \frac{A_m\,(1+n)}{2\,\mu}\ \frac{\text{sh}\,\mu\,e - \text{sen}\,\mu\,e}{\text{ch}\,\mu\,e + \cos\mu\,e} \qquad (30)$$

$$\int_{-e/2}^{e/2} \varphi\, x\, dx = \frac{A_m (1-n)\, e}{4\mu} \; \frac{\operatorname{sh} \mu e - \operatorname{sen} \mu e}{\operatorname{ch} \mu e - \cos \mu e} \qquad (31)$$

$$\int_{-e/2}^{e/2} \psi\, x\, dx = \frac{A_m (1-n)\, e}{4\mu} \left(\frac{\operatorname{sh} \mu e + \operatorname{sen} \mu e}{\operatorname{ch} \mu e - \cos \mu e} - \frac{2}{\mu e} \right) \qquad (32)$$

Note-se que embora os valores de $\overline{\theta}_{extr.}$ e $\overline{\overline{\theta}}_{extr.}$ não ocorram em geral simultâneamente, esta hipótese poderá ser sempre considerada por se situar do lado da segurança. O artifício desenvolvido para as placas pode considerar-se extensivo às peças laminares de pequena curvatura, isto é, às cascas de espessura pequena quando comparada com a sua curvatura média. É o que vai fazer-se no parágrafo seguinte para o cálculo do vector das forças fictícias.

5 — CÁLCULO NUMÉRICO

Fixada a lei de variação da temperatura ambiente nas duas faces da casca, a formulação estabelecida no parágrafo anterior permite a determinação das temperaturas $\overline{\theta}$ e $\overline{\overline{\theta}}$ mais desfavoráveis que deverão servir de base ao cálculo das forças fictícias f_ξ^θ, f_η^θ, f_ζ^θ e $f_{\eta o}^\theta$. As expressões (18) podem ser traduzidas em diferenças finitas, o que significa que a determinação das temperaturas $\overline{\theta}$ e $\overline{\overline{\theta}}$ se fará apenas para uma rede discreta de pontos. Sejam $\overline{\theta}$ (0,0) e $\overline{\overline{\theta}}$ (0,0) respectivamente os valores de $\overline{\theta}$ e $\overline{\overline{\theta}}$ num ponto central $\alpha = 0$, $\beta = 0$ tomado como referência numa rede ortogonal $\alpha\ \beta$ traçada sobre a superfície média da casca. Representemos os pontos situados à frente e atrás de (0,0) sobre $\alpha =$ cte., respectivamente por (2,0) e (−2,0) e sobre $\beta =$ cte. por (0,2) e (0,−2), sendo as distâncias respectivamente $(\xi_2^o - \xi_{-2}^o)$ e $(\eta_2^o - \eta_{-2}^o)$. Adoptando análoga notação para os pontos vizinhos as expressões (18 a) e (18 c) tomam em diferenças finitas a seguinte forma:

$$f_\xi^\theta (0,0) = (1+\nu)\, \alpha \left[\frac{(K_a \overline{\theta})_{2,0} - (K_a \overline{\theta})_{-2,0}}{(\xi_2^o - \xi_{-2}^o)} + \right.$$

$$+ \frac{1}{R_\zeta^\alpha} \frac{\left(\frac{K_f \overline{\overline{\theta}}}{e}\right)_{2,0} - \left(\frac{K_f \overline{\overline{\theta}}}{e}\right)_{-2,0}}{(\xi_2^o - \xi_{-}^o)} -$$

$$\left. - \frac{1}{R^{\alpha\beta}} \frac{\left(\frac{K_f \overline{\overline{\theta}}}{e}\right)_{0,2} - \left(\frac{K_f \overline{\overline{\theta}}}{e}\right)_{0,-2}}{(\eta_2^o - \eta_{-2}^o)} \right]$$

$$f_\eta^\theta (0,0) = (1+\nu)\, \alpha \left[\frac{(K_a \overline{\theta})_{0,2} - (K_a \overline{\theta})_{0,-2}}{(\eta_2^o - \eta_{-2}^o)} + \right.$$

$$+ \frac{1}{R_\zeta^\beta} \frac{\left(\frac{K_f \overline{\overline{\theta}}}{e}\right)_{0,2} - \left(\frac{K_f \overline{\overline{\theta}}}{e}\right)_{0,-2}}{(\eta_2^o - \eta_{-2}^o)} -$$

$$\left. - \frac{1}{R^{\alpha\beta}} \frac{\left(\frac{K_f \overline{\overline{\theta}}}{e}\right)_{2,0} - \left(\frac{K_f \overline{\overline{\theta}}}{e}\right)_{-2,0}}{(\xi_2^o - \xi_{-2}^o)} \right]$$

$$f_\zeta^\theta (0,0) = (1+\nu)\, \alpha \left[\frac{(K_a \overline{\theta})_{0,0}}{R_\zeta^\alpha} + \frac{(K_a \overline{\theta})_{0,0}}{R_\zeta^\beta} - \right.$$

$$- \frac{\left(\frac{K_f \overline{\overline{\theta}}}{e}\right)_{4,0} - \left(\frac{K_f \overline{\overline{\theta}}}{e}\right)_{0,0}}{(\xi_4^o - \xi_0^o)\,(\xi_2^o - \xi_{-2}^o)} +$$

$$+ \frac{\left(\frac{K_f \overline{\overline{\theta}}}{e}\right)_{0,0} - \left(\frac{K_f \overline{\overline{\theta}}}{e}\right)_{-4,0}}{(\xi_0^o - \xi_{-4}^o)\,(\xi_2^o - \xi_{-2}^o)} -$$

$$- \frac{\left(\frac{K_f \overline{\overline{\theta}}}{e}\right)_{0,4} - \left(\frac{K_f \overline{\overline{\theta}}}{e}\right)_{0,0}}{(\eta_4^o - \eta_0^o)\,(\eta_2^o - \eta_{-2}^o)} +$$

$$+ \frac{\left(\frac{K_f \overline{\overline{\theta}}}{e}\right)_{0,0} - \left(\frac{K_f \overline{\overline{\theta}}}{e}\right)_{0,-4}}{(\eta_0^o - \eta_{-4}^o)\,(\eta_2^o - \eta_{-2}^o)} +$$

$$+ \frac{1}{R_\xi^\beta} \frac{\left(\frac{K_f \overline{\overline{\theta}}}{e}\right)_{2,0} - \left(\frac{K_f \overline{\overline{\theta}}}{e}\right)_{-2,0}}{(\xi_2^o - \xi_{-2}^o)} +$$

$$\left. + \frac{1}{R_\eta^\alpha} \frac{\left(\frac{K_f \overline{\overline{\theta}}}{e}\right)_{0,2} - \left(\frac{K_f \overline{\overline{\theta}}}{e}\right)_{0,-2}}{(\eta_2^o - \eta_{-2}^o)} \right]$$

$$f_{\eta o}^\theta = (1+\nu)\, \alpha\, K_a \overline{\theta}$$

CONSTRUÇÕES TÉCNICAS, LDA.

PRAÇA DO MUNICÍPIO, 13-3º TELEF. 366506 LISBOA 2

DELEGAÇÕES: CABO VERDE · ANGOLA · MOÇAMBIQUE

EMPRESA TERMOELÉCTRICA PORTUGUESA

Ensecadeiras para execução da tomada de água da Central do Carregado.

CONSTRUÇÕES TÉCNICAS, LDA.

PRAÇA DO MUNICÍPIO, 13-3º TELEF. 366506 LISBOA 2

DELEGAÇÕES: CABO VERDE · ANGOLA · MOÇAMBIQUE

COMPANHIA DOS CIMENTOS DE LEIRIA – Edifício da ensacagem, nas instalações da Maceira (LIS).

PROSPECÇÃO GEOTÉCNICA • FUNDAÇÕES ESPECIAIS

OBRAS MARÍTIMAS E PORTUÁRIAS • PONTES E VIADUTOS

CONSTRUÇÕES CIVIS • CONSTRUÇÕES INDUSTRIAIS

Como se disse no § 3, as expressões das equações de equilíbrio (12) e (13) podem ser reunidas em 3 únicas equações diferenciais que relacionam os esforços de casca N_ξ, N_η, M_ξ, M_η, $T_{\xi\eta} = T_{\eta\xi}$ e $\mathfrak{M}_{\xi\eta} = \mathfrak{M}_{\eta\xi}$. Por outro lado as expressões (14) permitem substituir naquelas equações de equilíbrio os esforços pelas deformações generalizadas ε_ξ, ε_η, k_ξ, k_η, $\gamma_{\xi\eta}$, τ_ξ e τ_η, ou ainda estas pelas três componentes u, v e w do deslocamento, através das expressões [8]:

$$
\begin{aligned}
\varepsilon_\xi &= \frac{Du}{D\xi} - \frac{v}{R^\alpha_\eta} - \frac{w}{R^\alpha_\nu} \\
\varepsilon_\eta &= \frac{Dv}{D\eta} - \frac{u}{R^\beta_\xi} - \frac{w}{R^\beta_\nu} \\
k_\xi &= \frac{D^2w}{D\xi^2} - \frac{1}{R^\alpha_\eta}\frac{Dw}{D\eta} + \frac{D}{D\xi}\left(\frac{u}{R^\alpha_\nu}\right) + \\
&\quad + \frac{u}{R^{\alpha\beta}R^\alpha_\eta} - \frac{D}{D\xi}\left(\frac{v}{R^{\alpha\beta}}\right) - \frac{v}{R^\beta_\nu R^\alpha_\eta} \\
k_\eta &= \frac{D^2w}{D\eta^2} - \frac{1}{R^\beta_\xi}\frac{Dw}{D\xi} + \frac{D}{D\eta}\left(\frac{v}{R^\beta_\xi}\right) + \\
&\quad + \frac{u}{R^{\alpha\beta}R^\beta_\xi} - \frac{D}{D\eta}\left(\frac{u}{R^{\alpha\beta}}\right) - \frac{u}{R^\alpha_\nu R^\beta_\xi} \\
\gamma_{\xi\eta} &= \frac{Du}{D\eta} + \frac{Dv}{D\xi} + \frac{u}{R^\alpha_\eta} + \frac{v}{R^\beta_\xi} + 2\frac{w}{R^{\alpha\beta}} \\
\tau_\xi &= \frac{D^2w}{D\eta D\xi} + \frac{1}{R^\alpha_\eta}\frac{Dw}{D\xi} + \frac{D}{D\xi}\left(\frac{v}{R^\beta_\nu}\right) + \\
&\quad + \frac{u}{R^\alpha_\nu R^\alpha_\eta} - \frac{D}{D\xi}\left(\frac{u}{R^{\alpha\beta}}\right) - \frac{v}{R^{\alpha\beta}R^\alpha_\eta} \\
\tau_\eta &= \frac{D^2w}{D\xi D\eta} + \frac{1}{R^\beta_\xi}\frac{Dw}{D\eta} + \frac{D}{D\eta}\left(\frac{u}{R^\alpha_\nu}\right) + \\
&\quad + \frac{v}{R^\beta_\nu R^\beta_\xi} - \frac{D}{D\eta}\left(\frac{v}{R^{\alpha\beta}}\right) - \frac{u}{R^{\alpha\beta}R^\beta_\xi}
\end{aligned}
\tag{34}
$$

As três equações diferenciais, de equilíbrio assim obtidas em termos das três componentes do deslocamento permitem a resolução analítica do problema, desde que se considerem como incógnitas os deslocamentos. É fácil verificar que o sistema, das três equações diferenciais de equilíbrio é de 8.ª ordem, sendo duas das equações de 2.ª ordem e a 3.ª correspondente ao equilíbrio segundo a normal à casca, de 4.ª ordem.

Aquelas equações podem também ser expressas em diferenças finitas, obtendo-se um sistema de 3 N equações a 3 N incógnitas, em que N é o número de nós discretizados sobre a superfície média da casca.

Utilizando a notação matricial pode dar-se ao sistema de equações obtido a seguinte forma:

$$KU + f^\Theta = 0 \tag{35}$$

sendo K uma matriz quadrada de dimensões $3N \times 3N$, se o vector das três componentes do deslocamento de nós considerados $u = \{(u_1, v_1, w_1), (u_2, v_2, w_2), \ldots, (u_n, v_n, w_n)\}$ e f^Θ o vector das três componentes f^θ_ξ, f^θ_η e f^θ_ν das forças fictícias correspondentes aos mesmos nós, incluídas as de bordo livre. Vê-se assim que desde que se disponha da matriz K, formada por exemplo para o estudo de outra solicitação fundamental actuando na peça laminar, o estudo do efeito das variações térmicas é fàcilmente realizado. Com efeito, basta calcular as componentes do vector da solicitação fictícia f^Θ correspondente às variações térmicas e efectuar a operação

$$u = -K^{-1} f^\Theta \tag{36}$$

ou seja, multiplicar o vector $-f^\Theta$ pela matriz inversa de K. Conhecidos os deslocamentos nos nós, obtém-se pelas expressões (34) e (14) os valores dos esforços. Note-se porém que os esforços calculados são os esforços termo-elásticos actuantes na peça laminar, correspondendo portanto aos assinalados com o expoente θ nas expressões (17). Para se obterem os esforços de coacção, isto é, os que produzem o estado de tensão na casca, há que aplicar aquelas expressões a cada um dos nós considerados. Note-se que nesta fase há que aplicar ao bordo livre esforços que anulem os esforços N^θ_0 impostos ao contorno. Conhecidos os valores dos esforços de coacção, obtêm-se imediatamente as tensões instaladas na su-

perfície da peça laminar devido ao efeito térmico:

$$\sigma_\xi = \frac{N_\xi^c}{e} \pm \frac{6\,M_\xi^c}{e^2}$$

$$\sigma_\eta = \frac{N_\eta^c}{e} \pm \frac{6\,M_\eta^c}{e^2} \qquad (37)$$

$$\tau_{\xi\eta} = \frac{T_{\xi\eta}^c}{e} \pm \frac{6\,\mathcal{M}_{\xi\eta}^c}{e_2}$$

6 — EXEMPLO

O método de cálculo exposto vai ser aplicado ao estudo do efeito das variações térmicas ambientes sobre uma barragem casca. As características geométricas da barragem escolhida são as definidas no trabalho anterior dum dos autores [8].

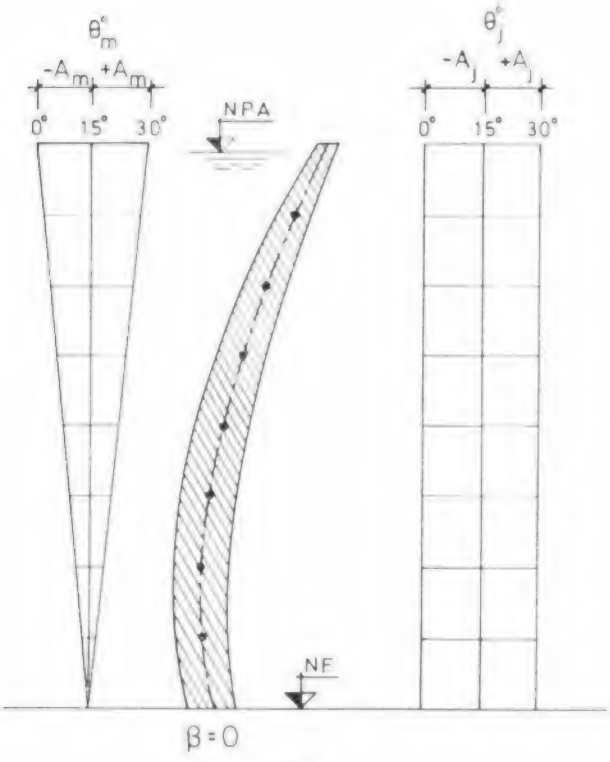


Fig. 5

A discretização realizada sobre a superfície média da barragem casca definiu 75 nós pertencentes a uma rede ortogonal de curvas, paramétricas, englobando como curvas da mesma família o coroamento e a linha da fundação e como curvas da família que lhe é ortogonal a que existe no plano vertical de simetria da barragem e a dos encontros.

A matriz rigidez já formada para o estudo do efeito da pressão hidrostática [8] foi de novo utilizada para o estudo do efeito das variações térmicas. Na figura 5 apresenta-se o valor das temperaturas médias θ^o e as amplitudes A da oscilação anual ao longo dos paramentos de montante e de jusante. Supõe-se que a temperatura média θ^o é constante em ambos os paramentos $+15\,^oC$, havendo amplitudes máximas de oscilação anual de $\pm 15\,^oC$ no coroamento. Estas amplitudes mantêm-se constantes do lado de jusante, mas decrescem linearmente com a profundidade, a montante, até anular-se no fundo da albufeira.

Estes diagramas esquematizam os resultados de observações efectuadas em numerosas barragens construídas em climas temperados [5]. A partir deles obtiveram-se, pela formulação estabelecida anteriormente, para os diversos nós da malha discreta, as forças fictícias indicadas no quadro I. Neste quadro apresentam-se também os valores das temperaturas $\overline{\theta}$ e $\overline{\overline{\theta}}$, bem como ourtos valores que serviram de base ao cálculo daquelas forças. É importante notar que os valores de $\overline{\theta}$ figurados no quadro estão referidos à temperatura de injecção das juntas de betonagem, que foi tomada como sendo $\theta_i = +10\,^oC$.

A partir do vector de forças fictícias realizou-se no computador ELLIOTT 803 do L. N. E. C. a operação matricial expressa por (36) obtendo-se as componentes do vector deslocamento apresentadas nas figuras 6, 7 e 8.

Utilizando programas já elaborados, calcularam-se os esforços de casca correspondentes aos deslocamentos termo-elásticos. Estes esforços fictícios têm que ser corrigidos pelas expressões (17a) e (17b) para se obterem os que originam o estado de tensão de coacção. Também nesta fase foi desfeito o artifício utilizado para traduzir o comportamento do bordo livre, aplicando forças iguais e oposta àquelas que se impuseram àquela fronteira. Na figura 9 apresentam-se os valores dos esforços N_ξ, N_η, M_ξ e M_η ao longo do perfil central ($\beta = 0$). Na mesma figura indica-se a tracejado o andamento dos esforços termo-elásticos N_ξ^θ, N_η^θ, M_ξ^θ e M_η^θ isto é, os que são obtidos directamente dos deslocamentos. A partir do

QUADRO I

Pontos		e	$\overline{\theta}$	$\overline{\overline{\theta}}$	$K_a \overline{\theta}$	$\frac{K_f \overline{\overline{\theta}}}{e}$	Forças fictícias (t)		
β	α	(m)	(°C)	(°C)			f_ξ^θ	f_η^θ	f_ζ^θ
0	2	6,95	— 1,78	— 6,03	— 32 216 145	— 63 381 308	0	11,0	— 16,7
0	4	7,50	— 2,42	— 4,55	— 47 265 625	— 55 847 168	0	17,5	— 18,3
0	6	6,53	— 4,91	— 2,63	— 83 495 571	— 24 170 579	0	12,0	— 24,3
0	8	3,84	— 8,89	— 0,66	— 88 900 000	— 2 088 960	0	— 25,3	— 18,9
2	2	6,97	— 2,12	— 5,61	— 38 480 209	— 58 786 263	6,1	9,8	— 16,0
2	4	7,44	— 2,61	— 4,38	— 50 568 750	— 52 613 885	5,6	17,1	— 18,1
2	6	6,49	— 4,98	— 2,58	— 84 167 189	— 23 729 119	1,6	11,2	— 21,5
2	8	3,84	— 8,90	— 0,65	— 88 536 461	— 2 056 490	— 0,7	— 26,4	— 17,6
4	2	6,92	— 2,70	— 4,90	— 48 656 249	— 51 058 042	8,9	11,0	— 16,1
4	4	7,12	— 3,22	3,97	— 59 704 168	— 43 864 738	8,6	16,6	— 23,3
4	6	6,45	— 5,13	— 2,44	— 86 167 969	— 22 128 413	3,4	9,3	— 23,4
4	8	3,79	— 8,91	— 0,63	— 87 939 847	— 2 008 418	— 1,1	— 29,0	— 15,1
6	2	6,73	— 3,35	— 4,29	— 58 712 241	— 42 336 289	10,0	— 12,4	— 16,0
6	4	6,78	— 3,91	— 3,52	— 69 035 938	— 35 170 614	9,3	16,5	— 21,7
6	6	5,96	— 5,82	— 2,24	— 90 331 248	— 17 458 620	3,8	6,0	— 24,9
6	8	3,70	— 9,01	— 0,58	— 86 815 107	— 1 758 785	— 2,2	— 34,8	— 18,3
8	2	6,47	— 4,08	— 3,69	— 68 743 749	— 33 502 347	9,4	13,3	— 14,3
8	4	6,36	— 4,71	— 3,05	— 78 009 375	— 26 797 860	8,4	15,0	— 22,5
8	6	5,56	— 6,43	— 1,98	— 93 101 044	— 13 428 095	2,0	2,8	— 24,5
8	8	3,55	— 9,12	— 0,51	— 84 312 503	— 1 359 254	— 2,9	— 42,9	— 18,2
10	2	6,09	— 5,05	— 2,99	— 78 906 250	— 22 968 750	8,8	12,8	— 12,7
10	4	5,77	— 5,79	— 2,47	— 87 000 783	— 17 926 001	6,2	11,9	— 23,1
10	6	5,01	— 7,24	— 1.61	— 94 459 375	— 8 732 743	— 0,3	— 3,2	— 26,2
10	8	3,34	— 9,32	— 0,41	— 81 064 586	— 970 305	— 3,7	— 56,2	— 19,7
12	2	5,48	— 6,18	— 2,36	— 88 193 748	— 15 356 691	5,3	10,3	— 13,8
12	4	5,17	— 6,81	— 1,94	— 91 686 721	— 11 395 746	2,0	4,1	— 21,2
12	6	4,46	— 7,96	— 1,26	— 92 452 081	— 5 390 762	0,3	— 10,4	— 28,1
12	8	3,09	— 9,51	— 0,28	— 76 525 781	— 576 243	— 3,3	— 72,1	— 20,5

valor dos primeiros calcularam-se as tensões σ_ξ e σ_η ao longo do perfil central (fig. 10).

Pela análise do andamento destas curvas verifica-se que para o diagrama de variações térmicas considerado no exemplo se geram tensões de tracção a meio do paramento de jusante que atingem valores da ordem dos 20 kg/cm². Estas tensões de tracção horizontal na secção de fecho de jusante invertem-se próximo do coroamento atingindo no bordo livre valores máximos de compressão da ordem dos 30 kg/cm².

No paramento de montante as tensões horizontais na secção do fecho da abóbado são quase exclusivamente de compressão.

As tensões de tracção verticais na secção estudada são máximas no pé de jusante, onde atin-

gem valores máximos da ordem dos 20 kg/cm². No pé de montante as tensões verticais são de compressão, mantendo-se com o mesmo sinal numa extensa zona da secção de fecho, mas invertendo-se próximo do coroamento.

O bordo livre causa uma importante perturbação no andamento das tensões horizontais e verticais reinantes nos paramentos de montante e jusante da secção do fecho. É de notar a importância das tensões resultantes das variações térmicas que atingem, para o diagrama de oscilações térmicas analisado no exemplo, tensões de tracção e compressão da ordem de 1 3 dos valores das tensões máximas de compressão na abóbada devidos à pressão hidrostática. Embora no exemplo estudado as tensões de tracção máximas se verifiquem em zonas onde reinam tensões de compressão devida à pressão

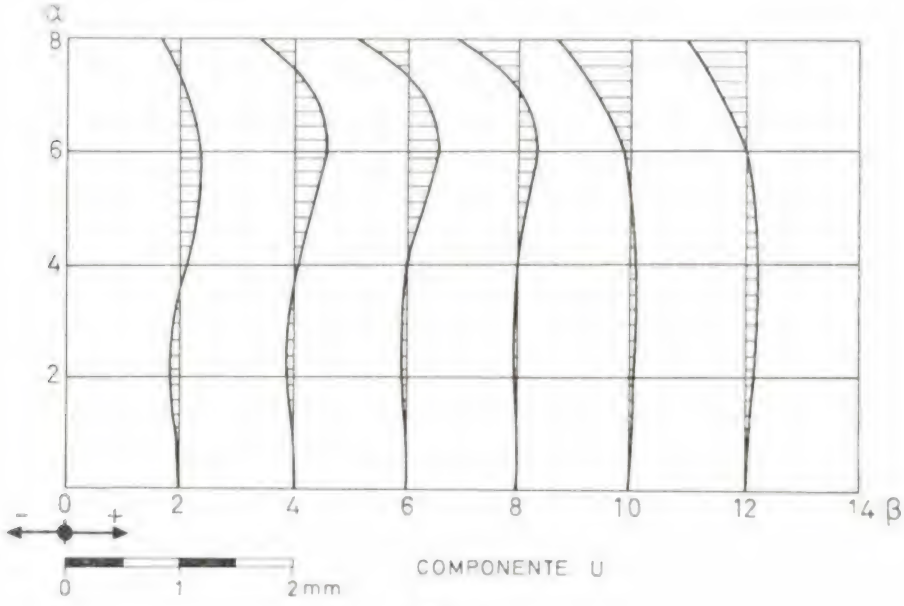


Fig. 6

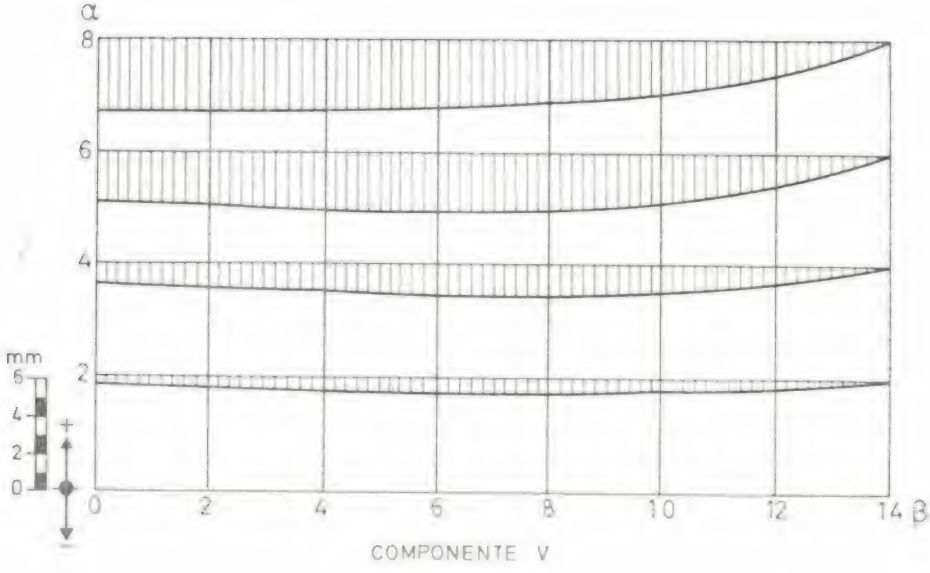


Fig. 7

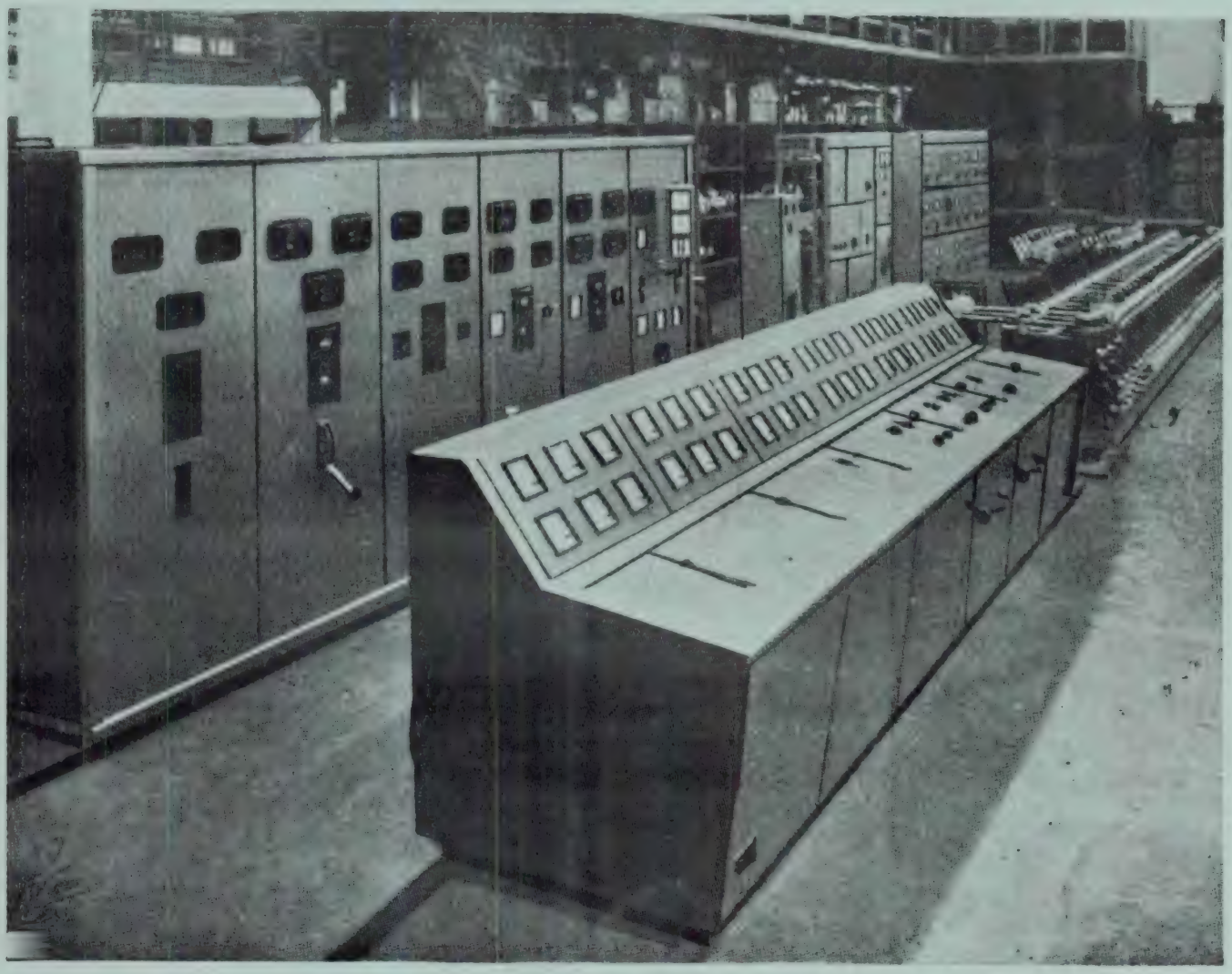
JAYME DA COSTA, L^DA

MECÂNICA E ELECTRICIDADE EM TODAS AS APLICAÇÕES

PORTO
Praça da Batalha, 12
Telef. 2 28 12 (PPC)

LISBOA
Rua dos Correeiros, 14
Telef. 32 70 35 (PPC)

LUANDA
Cx. Postal 5174
Telef. 4743



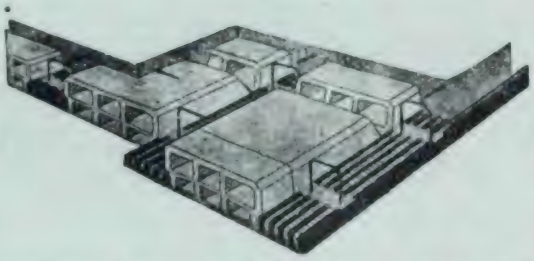
Material fabricado nas nossas oficinas, pronto para expedição

- Fabricação de aparelhagem eléctrica de alta e baixa tensão
- Equipamentos electromecânicos completos para centrais e fábricas
- Postos de transformação tipo monobloco
- Quadros blindados, capsulados e em armário
- Armaduras de iluminação de todos os tipos
- Contadores eléctricos e instrumentos de medida
- Telemedida e telecomando
- Instalações elevatórias de água
- Instalações de saneamento e esgotos
- Ferramentas de corte
- Motores Diesel industriais e marítimos
- Fogões eléctricos
- Frigoríficos
- Ventilação e condicionamento de ar
- Aparelhagem de Raios X e electromedicina

PRÉ - ESFORÇADOS CERÂMICOS

PATIAL

patente stahlton



PAVIMENTOS, TECTOS, FORROS, COBERTURAS, ASNAS, SILOS

CERVAL

CERÂMICA VALE DE LOBOS, L.DA

R. JOAQUIM A. AGUIAR, 41, 5.º-D. - LISBOA - TEL. 53 11 38/9/0

COMPANHIA PORTUGUESA DE TREFILARIA, S. A. R. L.

trefilaço

A40
σ 0,2 = 40 kgf/mm²

MALHASOL

A50
σ 0,2 = 50 kgf/mm²

AÇO BI

A68
σ 0,2 = 68 kgf/mm²

AÇOS DE ALTA RESISTÊNCIA
PARA BETÃO ARMADO

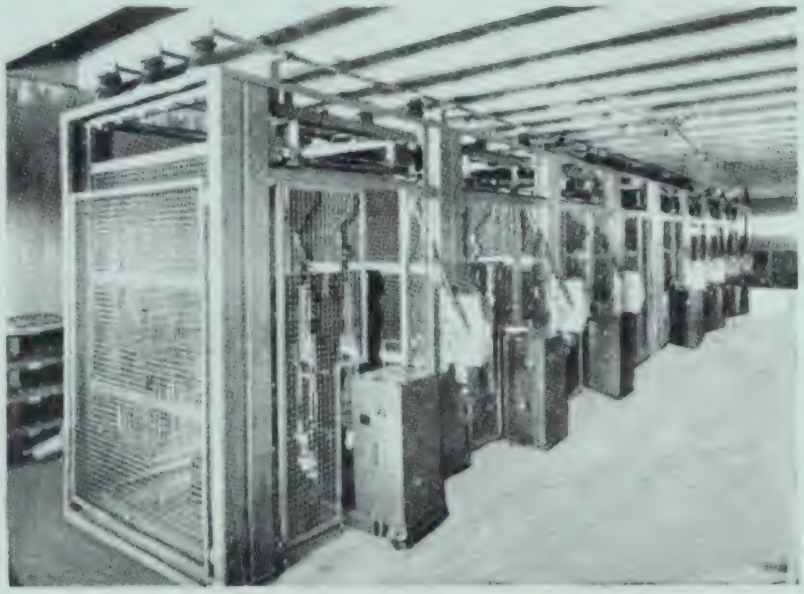
DIAL — GABINETE TÉCNICO
R. DO INSTITUTO INDUSTRIAL, 18-1.º Dt.º
TELEFONES 67 12 24/5 e 67 37 85 - LISBOA

ISOLUX L.DA

ESTUDOS E INSTALAÇÕES ELÉCTRICAS

Porto
R. de Sá da Bandeira, 651 - 4
Tel. 2 70 13

Lisboa
L. Campo Pequeno, 21 - 4º Esq
Tel. 760964



CELAS ABERTAS DE ALTA TENSÃO

Projectos e instalações eléctricas de:

Centrais

Subestações

Postos de Transformação

Fábricas

Edifícios públicos

Blocos residenciais

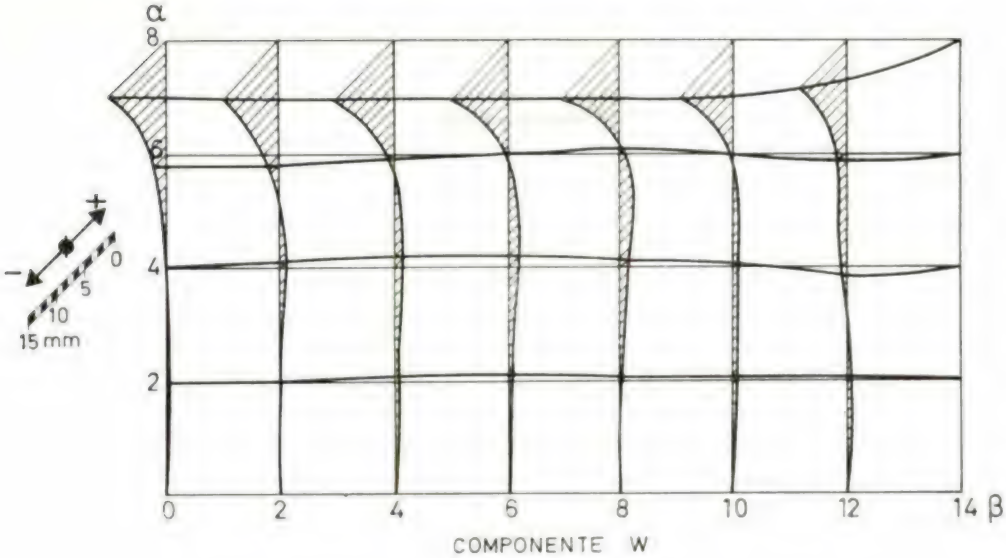


Fig. 8

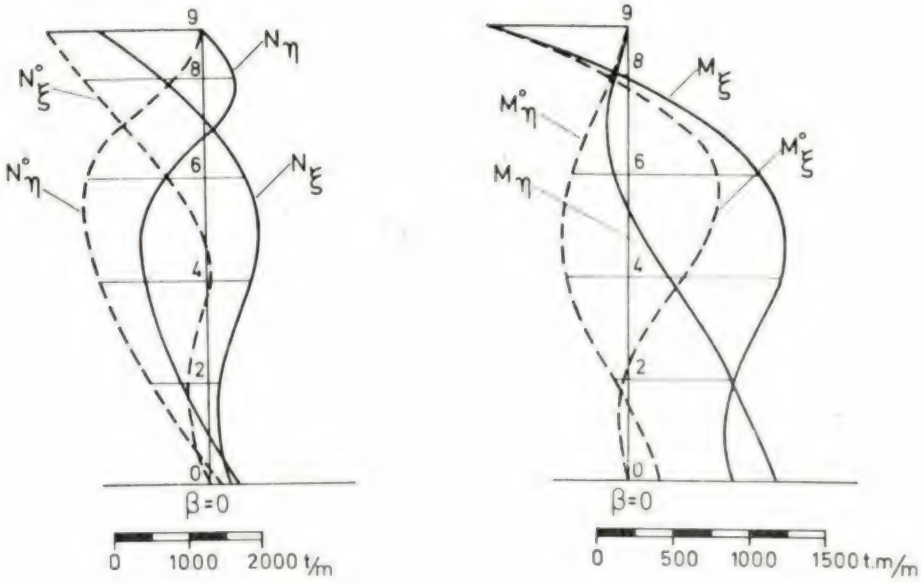


Fig. 9

hidrostática, seria possível escolher diagramas de variações de temperatura que originassem tensões de tracção que se sobrepusessem às da pressão hidrostática. Só um estudo analítico e sistemático permitiria esclarecer devidamente a importância das tensões térmicas e a sua distribuição na abóbada para diversos diagramas-tipo. Este problema tem sido abordado por via experimental [5], [6], mas aí as técnicas de ensaio sobre modelo complicam-se de tal modo que se acha preferível numa base preliminar, para apoio e esclarecimento dos resultados experimentais, o seu estudo analítico.

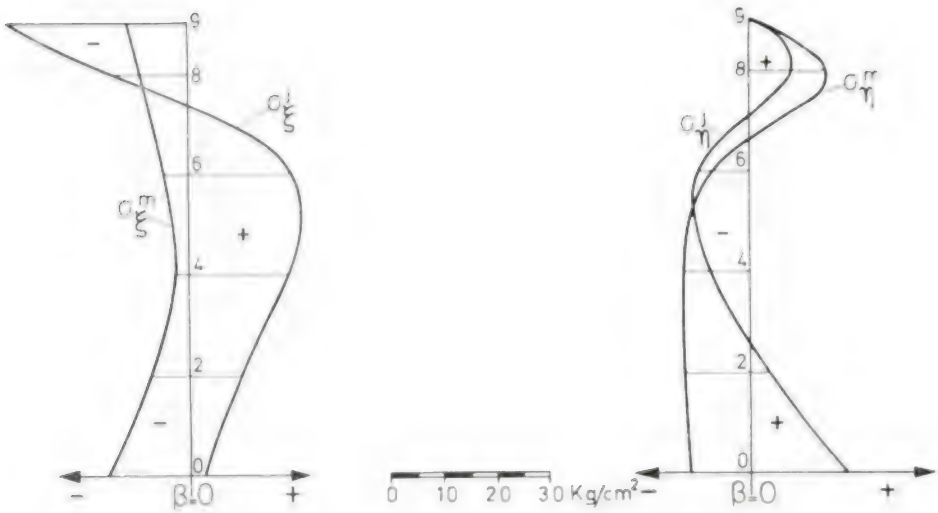


Fig. 10

BIBLIOGRAFIA

1 — Boley, B. A.; Weiner, J. H. *Theory of Thermal Stresses.* John Wiley & Sons, Inc., N. Y. 1960.

2 — Araújo, F. C. — *Elasticidade e Plasticidade.* Ed. Autor. Porto, 1961.

3 — Ritter, M. — *Temperaturverlauf und Warmespannungen in Mauern bei Oscillierenden Ausssentemperaturen.* Memórias da A. I. P. C., I vol. Zürich, 1943/44.

4 — Stucky, A.; Derron, M. H. — *Problèmes Thermiques Posés par les Barrages Reservoirs.* Sciences & Technique, Lausanne, 1957.

5 — Silveira, A. F. — *As Variações de Temperatura nas Barragens.* Memória n.º 177, L N E C, Lisboa, 1962.

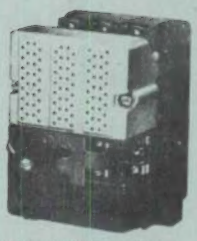
6 — Rocha, M.; Serafim, L. — *Determination of Thermal Stresses in Arch Dams by Means of Models.* Memória n.º 133, L N E C, Lisboa, 1958.

7 — Fialho, J. F. L. — *Principios Orientadores do Projecto de Barragens Abóbada.* Memória n.º 65, L N E C, Lisboa, 1955.

8 — Fialho, J. F. L. — *Barragens Casca.* Diss. I. S. T., Lisboa, 1966. (Divulgação pendente).

SIEMENS

Para proteger e comandar motores

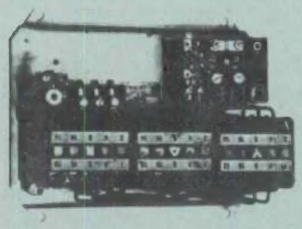


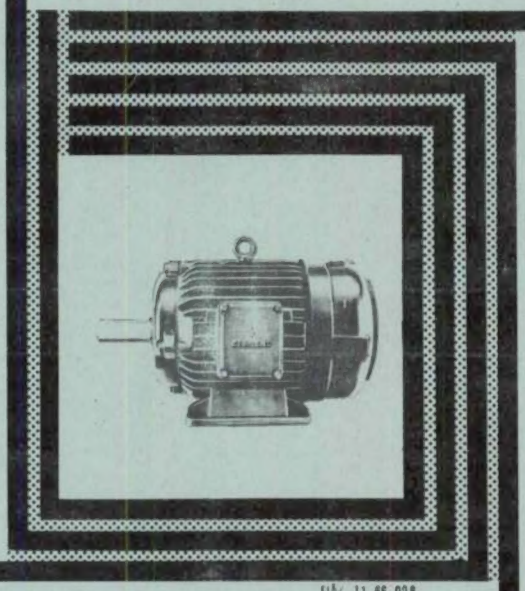
DISJUNTORES TRIPOLARES R 920

Equipados sempre com reles bimetálicos e disparadores electromagnéticos, são os aparelhos indicados para a protecção de qualquer equipamento eléctrico trifásico.

ARRANCADORES ESTRELA - TRIÂNGULO K 987

Dotados com contactores de ruptura no ar, permitem a ligação de motores trifásicos de rotor em curto-circuito até 210 KW, 500 V, 50 c/s.



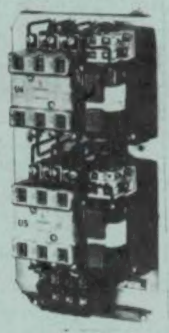


CONTACTORES K 915

Caracterizam-se essencialmente pela elevada frequência de manobras, alto poder de corte e longa duração, podendo ser fornecidos com relés bimetálicos.

INVERSORES AUTOMÁTICOS DE MARCHA

Utilizando os contactores K 915, são próprios para uma potência até 35 KV em 500 V, podendo também ser equipados com relés térmicos.



EIV 11 66 028

vale a pena consultar a Siemens

Peça catálogos e informações à

SIEMENS - COMPANHIA DE ELECTRICIDADE, S. A. R. L.

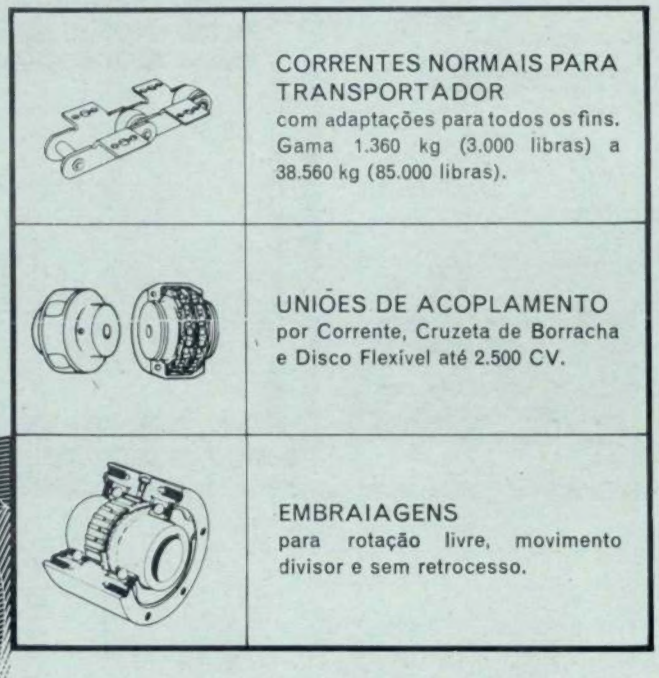
Sede: LISBOA-1 — Avenida Almirante Reis, 65 — Tel. 53 69 21/0

Delegação Técnica: PORTO — Rua das Carmelitas, 12 — Tel. 2 89 43/7

Mais de 1000 produtos **RENOLD** da maior organização mundial no fabrico de correntes de precisão

CORRENTES DE TRANSMISSÃO
De $\frac{1}{4}''$ até 5" segundo as normas BS, DIN, AFNOR, ASA e API.

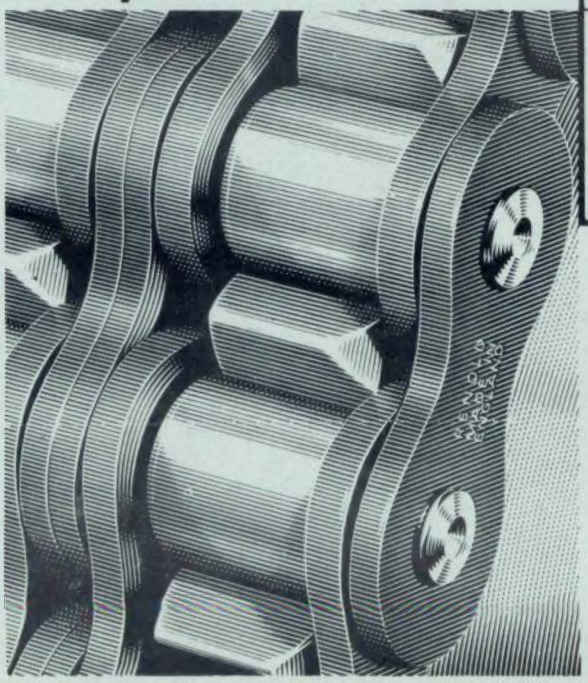
RODAS EM DEPOSITO
para uso com correntes RENOLD de transmissão e de transportadores.



CORRENTES NORMAIS PARA TRANSPORTADOR
com adaptações para todos os fins. Gama 1.360 kg (3.000 libras) a 38.560 kg (85.000 libras).

UNIÕES DE ACOPLAMENTO
por Corrente, Cruzeta de Borracha e Disco Flexível até 2.500 CV.

EMBRAIAGENS
para rotação livre, movimento divisor e sem retrocesso.



Para informações ou fornecimentos, escreva, visite ou telefone:

HARKER, SUMNER & Ca., Lda.

PORTO: **38, Rua de Ceuta, 48**
Apartado No. 162
Tel: 27054-P.P.C. (4 linhas)

LISBOA-2: **14, Largo do Corpo Santo, 18**
Tel: 324823-35124

RENOLD

RENOLD LIMITED · SALES DIVISION
MANCHESTER · ENGLAND

C. D. U. 624.07 : 519.3
624.025.2.002.22

O DIMENSIONAMENTO E A OPTIMIZAÇÃO DE PAVIMENTOS PRÉ-FABRICADOS (*)

por J. VASCONCELOS PAIVA
Engenheiro Estagiário para Especialista
Serviço de Edifícios e Pontes
LNEC — Lisboa

RESUMO

Definem-se neste trabalho os esquemas de dimensionamento analítico dos pavimentos pré-fabricados com vigotas de betão pré-esforçado, utilizados no LNEC, e discutem-se os parâmetros que estão na base da optimização das vigotas, na fase do seu dimensionamento.

Finalmente, analisam-se diversos critérios de optimização duma gama de pavimentos daquele tipo, com vista à sua redução aos elementos de aplicação mais favorável.

SYNOPSIS

The analytic design schemes in use at the Laboratório Nacional de Engenharia Civil for prefabricated floors with prestressed concrete joists are presented, and the parameters which govern the optimization of joists in the design stage are discussed.

Finally several optimization criteria in use for different floors of this type are analysed with a view to selecting the floors with optimum application.

1 — INTRODUÇÃO

Uma das formas de pré-fabricação ligeira em que mais se tem apoiado a construção de edifícios do tipo tradicional tem sido a utilização de pavimentos pré-fabricados. Em Portugal verificou-se, na última década, um notável incremento na aplicação desses pavimentos constituídos com vigotas de betão ou elementos cerâmicos, pré-esforçados, assistindo-se a uma multiplicação do número das respectivas unidades de fabrico.

Por força da legislação portuguesa, relativa às edificações urbanas, os novos materiais e processos de construção a aplicar no país, para os quais não exista uma experiência significativa de uso, devem ser apreciados e homologados pelo Laboratório Nacional de Engenharia Civil (LNEC). Como consequência directa deste facto, os pavimentos não tradicionais de betão armado ou pré-esforçado — ou ainda semelhantes, do ponto de vista de dimensionamento e funcionamento, como os de cerâmica armada ou pré-esforçada — têm sido submetidos à homologação do LNEC, sendo incluída, nos planos de apreciação, a realização de cálculos de verificação de dimensionamento, efectuados por via automática, no computador NCR Elliot 803-B, de acordo com as disposições da Circular da Informação Técnica (C.I.T.) n.º 29 — "Pavimentos constituídos por vigotas de betão pré-esforçado. Regras para o seu dimensionamento analítico e execução" [1].

Graças à experiência colhida no LNEC com a realização dos cálculos de vários milhares de pavimentos deste tipo, até esta data, foi possível estabelecer algumas vias de dimensionamento das vigotas, e definir os critérios que conduzem à optimização destas, e, paralelamente, das gamas de pavimentos que as integram.

O objectivo deste trabalho consiste precisamente na definição dessas vias e dos critérios de optimização a seguir, quer para as vigotas, na fase do seu dimensionamento, quer para a gama de pavimentos constituída com base naquelas, a qual se procura reduzir aos elementos de utilização mais favorável.

2 — DIMENSIONAMENTO ANALÍTICO DOS PAVIMENTOS PRÉ-FABRICADOS

2.1 — Constituição duma gama de pavimentos

Uma gama de pavimentos pré-fabricados com vigotas de betão pré-esforçado constitui-se com uma série de vigotas, tendo em geral a mesma forma de secção de betão e diferentes armaduras

(*) Comunicação apresentada às II Jornadas Luso-Brasileiras de Engenharia Civil — Rio de Janeiro e S. Paulo, 1967

de pré-esforço, e um conjunto de blocos de cofragem, de diversas dimensões.

Da associação em obra de cada bloco de cofragem com os vários tipos de vigotas (desde que se verifique em todas a igualdade de secções de betão), e podendo ser variável a altura da lâmina de compressão de betão complementar, que solidariza entre si aqueles elementos pré-fabricados, resultam diferentes pavimentos pertencentes ao mesmo tipo.

Um tipo de pavimento é, por conseguinte, definido pela utilização de um bloco e de vigotas com forma idêntica, sendo a distinção entre pavimentos do mesmo tipo conferida pela armadura da vigota utilizada, e pela altura da lâmina de compressão, normalmente de 3, 4, 5 ou 6 cm.

Os tipos de pavimentos podem ainda ser simples ou duplos, consoante as nervuras resistentes entre blocos são constituídas por uma vigota, ou por duas vigotas colocadas a par.

No caso geral, e a menos que haja que prever soluções alternativas — por exemplo, quando certas carências no mercado dos aços aconselhem a utilização de vigotas sensìvelmente equivalentes do ponto de vista resistente, mas armadas com varões de diferentes diâmetros — bastarão quatro ou cinco tipos de vigotas, se convenientemente estudados, para satisfazerem as necessidades duma gama de pavimentos, entre limites bastante largos.

É também importante a escolha criteriosa das dimensões exteriores dos blocos de cofragem a utilizar, das quais vão depender directamente o afastamento entre nervuras e a altura dos diversos pavimentos, com vista a obter-se um elevado rendimento e um bom escalonamento da gama.

2.2 — Determinação da capacidade resistente dos pavimentos

Além do momento de inércia da secção transversal dum pavimento, e dos módulos de elasticidade dos materiais que o constituem — grandezas responsáveis pela deformabilidade do pavimento, que não deve ultrapassar certos valores limites [1] — a capacidade resistente desse pavimento fica definida pelos valores do seu momento flector de serviço, M_s, e do seu esforço transverso de serviço, T_s. O pavimento poderá suportar determinadas condições de vão e de solicitação (do tipo I), se os esforços actuantes M e T, originados nessas condições, obedecerem às seguintes relações evidentes:

$$M \leqslant M_s$$
$$T \leqslant T_s$$

Vejamos então como se calculam os esforços de serviço, para analisarmos em seguida como é possível actuar no dimensionamento, para melhorar os valores desses esforços, em especial o momento M_s.

Antes disso, torna-se necessário que se indiquem quais as tensões permitidas nos materiais, de acordo com a C.I.T. n.º 29.

Conforme a classe de betão das vigotas, B350 ou B450, as tensões admissíveis nestes elementos em fase elástica são dadas no quadro seguinte:

Tipos de esforços		Tensões admissíveis kgf/cm²	
		B 350	B 450
Compressão resultante da flexão	tensão temporária	— 140	— 180
	tensão em serviço	— 110	— 140
Tracção resultante da flexão	na fibra inferior	+ 10	
	na fibra superior	+ 30	
Corte	sem armaduras para esforços transversos	6	
	com armaduras para esforços transversos	14	